Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von Dr. phil. *Dedekind* zu Göttingen.

(Besonders abgedruckt aus *Crelle's* „Journal für die reine u. angewandte Mathematik, Bd. 50.")

In einem der früheren Hefte des „Philosophical Magazine" für 1854 hat *G. Boole* eine von *C. Cayley* gegebene Auflösung einer Wahrscheinlichkeits-Aufgabe angegriffen. Wiewohl nicht zu zweifeln, dafs der in diesem Angriff enthaltene Irrthum auch von Andern schon erkannt sei, so kommen doch die folgenden Bemerkungen Denen, welche sich für diese schöne Theorie interessiren, vielleicht nicht unerwünscht.

Die Aufgabe lautet: Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit α, dafs eine Ursache A (welche ein gewisses Ereignifs hervorbringen kann) zur Wirkung kommt, und die Wahrscheinlichkeit p, dafs, wenn A wirkt, das Ereignifs eintritt; eben so die Wahrscheinlichkeit β, dafs eine Ursache B zur Wirkung gelangt, und die Wahrscheinlichkeit q, dafs, wenn B wirkt, das Ereignifs eintritt: gesucht wird die Wahrscheinlichkeit u des Ereignisses, unter der Annahme, dafs dasselbe von keiner andern Ursache als von A und B hervorgebracht werden kann.

Cayley löset die Aufgabe auf folgende Weise: Es sei λ die Wahrscheinlichkeit, dafs, wenn A wirkt, das Ereignifs auch durch A hervorgebracht wird; μ die Wahrscheinlichkeit, dafs, wenn B wirkt, das Ereignifs auch durch B hervorgebracht wird; dann ist

$$p = \lambda + (1-\lambda)\mu\beta; \qquad q = \mu + (1-\mu)\lambda\alpha.$$

Hieraus werden λ, μ bestimmt; und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$u = \lambda\alpha + \mu\beta - \lambda\mu\alpha\beta.$$

Nachdem nun *Boole* diese Auflösung bei mehren Specialisirungen als richtig bewährt fand, sucht er nachzuweisen, dafs sie in dem Falle $p=1$, $q=0$ zu einem falschen Resultat führe. Er sagt: Es ist einleuchtend, dafs die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in diesem Fall $=\alpha$ sein mufs. Denn wenn die Ursache A das Ereignifs *stets* hervorbringt, die Ursache B *niemals*, und das Eintreten des Ereignisses keiner andern Ursache zugeschrieben werden kann, so mufs die Wahrscheinlichkeit des „Ereignisses gleich der des Eintretens der Ursache A sein." Da sich gegen diesen Satz natürlich Nichts einwenden läfst, und nun die Auflösung, wie sie *Cayley* darstellt, in diesem Falle entweder $u = 1$, oder $u = \alpha(1-\beta)$ giebt, so schliefst *Boole*, dafs die ganze Auflösung fehlerhaft sein müsse, und giebt die Endformel seiner eigenen Auflösung, mit Hinzufügung besonderer Beschränkungen, aus denen sich allerdings für diesen Fall das gewünschte Resultat $u = \alpha$ ableiten läfst.

Man sieht indessen durchaus nicht, wo *Cayley* einen Fehler gemacht hätte; und in der That ist seine Auflösung auch (bis auf gewisse Beschränkungen, durch welche sie erst *eindeutig* gemacht werden mufs) streng richtig, selbst in dem eben angeführten Fall; denn man findet leicht, dafs $\alpha(1-\beta)$ mit α übereinstimmt, indem α Nichts Anderes als Null sein kann. Wäre nämlich die Möglichkeit des Eintretens der Ursache A offen gelassen, d. h. wäre α nicht Null, so könnte auch unmöglich die Wahrscheinlichkeit q des Ereignisses (unter der Annahme des Eintretens der Ursache B) gänzlich verschwinden, mag p noch so klein, nur nicht Null sein (in diesem Falle war aber $p = 1$ angenommen). Die gestellte Aufgabe ist daher *widersinnig*, wenn $q = 0$, α und p dagegen beide von Null verschieden angenommen werden. Dies ergiebt sich auch durch einen Blick auf die Gleichungen von *Cayley*. Wenn man nämlich beachtet, dafs μ, $(1-\mu)$, λ, α, *der Natur ihrer Bedeutung nach*, nicht *negativ* sein können, so folgt aus der *einen* Gleichung $q = 0$, sowohl $\mu = 0$, als auch $\lambda\alpha = 0$, und die andere Gleichung geht in $p = \lambda$ über. Ist nun p von Null verschieden (es ist nicht nöthig dafs p gerade $= 1$ sei), so mufs auch $\alpha = 0$ sein; und die gesuchte Wahrscheinlichkeit u mufs stets $= 0$ sein, mag q oder p, oder mögen beide $= 0$ sein; wie man es nicht anders erwarten darf.

Wenn nun aber dieser Vorwurf auch die obige Auflösung nicht trifft, so ist sie doch wenigstens noch *unvollständig* zu nennen, da die Bedingungen nicht angegeben sind, unter welchen die Aufgabe wirklich einen reellen Sinn hat, und da ferner zu entscheiden übrig bleibt, welchen der beiden Werthe von u, die den obigen Gleichungen genügen, man zu wählen habe. Dies soll hier geschehen.

Man verfährt mit der meisten Symmetrie, wenn man μ aus den Gleichungen für q und u, und eben so λ aus den Gleichungen für p und u eliminirt. Dies giebt

$$(1) \quad u - \beta q = (1-\beta)\lambda\alpha; \quad u - \alpha p = (1-\alpha)\mu\beta,$$

und wenn man diese Werthe von $\lambda\alpha$, $\mu\beta$ in die Gleichung für u substituirt, so erhält man eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung sich

$$(2.)\qquad u = \tfrac{1}{2}(1-\alpha\beta+\alpha p+\beta q-\varrho)$$

ergiebt, worin ϱ die *noch zweideutige* Quadratwurzel aus

$$\varrho\varrho = \begin{cases}(1-\alpha\beta+\alpha p+\beta q)^2-4(1-\beta)\alpha p,\\ -4(1-\alpha)\beta q-4\alpha p\,.\,\beta q\end{cases}$$

ist. Damit aber die Aufgabe lösbar sei, ist *nöthig:* zuerst, dafs ϱ *reell,* und weiter, dafs u (als eine Wahrscheinlichkeit) ein *positiver echter Bruch* sei. Aber auch Dies ist noch nicht *genügend;* und darin liegt eigentlich das Haupt-Interesse der ganzen Aufgabe. Sie würde immer noch ohne Sinn bleiben, wenn die Hülfs-Wahrscheinlichkeiten λ, μ nicht ebenfalls zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten wären, und es ist klar, dafs mit diesen *letzten* Bedingungen auch zugleich die *ersten* erfüllt werden müssen. Es kommt daher nur darauf an, die Bedingungen aufzustellen, welche ausdrücken, dafs λ, μ nicht aufserhalb der genannten Grenzen liegen. Dies ist leicht, da man die Werthe von λ, μ aus den Gleichungen (1.) erhält, wenn man in ihnen für u den in (2.) gefundenen Ausdruck substituirt. Bei dieser Untersuchung kommt man auf die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varrho\varrho &= (1-2\alpha+\alpha\beta+\alpha p-\beta q)^2+4\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(1-p)\\ &= (1-2\beta+\alpha\beta-\alpha p+\beta q)^2+4\beta(1-\beta)(1-\alpha)(1-q)\\ &= (1-\alpha\beta+\alpha p-\beta q)^2-4\alpha(1-\beta)(p-\beta q)\\ &= (1-\alpha\beta-\alpha p+\beta q)^2-4\beta(1-\alpha)(q-\alpha p).\end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Formen für $\varrho\varrho$ geht hervor, dafs es keiner besondern Bedingung für die Realität von ϱ bedarf. Setzt man aber die Formen in Verbindung mit den Forderungen für λ, μ, so ergiebt sich, dafs in dem Ausdrucke (2.) für u stets die *positive* Quadratwurzel für ϱ genommen werden mufs. Vergleicht man endlich die beiden letzten Formen für $\varrho\varrho$ mit den Forderungen für λ und μ, so erhält man, als die einzigen nothwendig *erforderlichen,* aber auch vollständig *genügenden* Bedingungen, dafs die beiden Differenzen

$$(3.)\qquad p-\beta q \quad\text{und}\quad q-\alpha p$$

nicht negativ sein dürfen.

Wenn man also, um ein Beispiel zu der Aufgabe zu geben, für α, β, p, q vier beliebige Zahlen innerhalb der Grenzen 0 und 1 angenommen hat, so mufs man erst untersuchen, ob sie den beiden Bedingungen in (3.) Genüge leisten. Beiläufig bemerkt, kann man bei einer solchen willkürlichen Wahl eben so oft ein widersinniges Beispiel wie ein passendes treffen; denn der Werth des vierfachen Integrals $\iiiint d\alpha\, d\beta\, dp\, dq$ ist $=1$, wenn man die Integrationen über *alle* Werthe der Veränderlichen zwischen 0 und 1 ausdehnt; dagegen $=\frac{1}{2}$, wenn man diejenigen Werthe ausschliefst, welche den Bedingungen (3.) nicht Genüge leisten. Man kann sich hiervon auch leicht durch *geometrische* Betrachtungen überzeugen.

In dem von ***Boole*** untersuchten Falle $q=0$ reduciren sich die Bedingungen (3.) auf $\alpha p = 0$; dann wird $\varrho = 1-\alpha\beta$, und folglich $u-0$; ganz in Übereinstimmung mit den obigen Resultaten. Auch der Fall $\alpha=0$ ist von Interesse. Dann ist $\varrho = 1-\beta q$, und folglich $u=\beta q$ offenbar das richtige Resultat. Hierbei ist natürlich u von q unabhängig, und dennoch bleibt die Bedingung $p-\beta q \geqq 0$ in voller Kraft, und obgleich zur Bestimmung von u auf den Werth von p gar kein Gewicht fällt, so wäre es doch widersinnig, die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses *unter der Annahme*, dafs die Ursache A zur Wirkung gelangt, kleiner als die Wahrscheinlichkeit βq anzunehmen, wenn auch diese Annahme durch die Bestimmung $\alpha = 0$ ***factisch verboten*** ist. Und mit dieser Bemerkung, die, wie ich glaube, dazu geeignet ist, auf die Eigenthümlichkeit dieser Art von Aufgaben ein frappantes Licht zu werfen, will ich meine Betrachtungen abbrechen.

Göttingen, 22. Juli 1854.