







In abgeschwächter Form wurde eine solche Aussage von **Tschebyscheff** (1850) bewiesen.

Nach wichtigen Vorarbeiten durch **Riemann** (1859) ließ der Beweis des Primzahlsatzes doch 100 Jahre auf sich warten; unabhängig voneinander waren 1895 fast gleichzeitig **Hadamard** und **de la Vallée Poussin** erfolgreich. Die Methoden reichen weit über die Zahlentheorie hinaus und verwenden Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Insbesondere geht es um die sogenannte Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s};$$

für reelle  $s > 1$  kommt sie schon bei Euler vor; von ihm stammt ja eine der schönsten Formeln der Analysis, nämlich

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1,64493 \dots$$

(wobei  $\pi = 3,14159 \dots$  die Kreiszahl ist und nichts mit der Funktion  $\pi(x)$  zu tun hat). Riemann dagegen deutet  $s$  als komplexe Zahl.

#### § 5.

Ein Ansatz von **Eratosthenes** (um 200 B.C.) führte erst um 1920 durch **V. Brun** zu brauchbaren Ergebnissen. Man spricht von einem Sieb; es geht dabei um kunstvolle kombinatorische Überlegungen. Wenn es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, so sind sie demzufolge wesentlich seltener als die Primzahlen. Etwa um dieselbe Zeit hat sich **H. Bohr** eingehend mit der Zetafunktion befaßt und seine Theorie der fast-periodischen Funktionen entwickelt. Nach **Vinogradov** (1937) ist jede große ungerade Zahl die Summe von drei Primzahlen. Wir erwähnen noch das Große Sieb von **Linnik** (1941). Weiter in die Gegenwart gehen wir nicht.

#### § 6.

Man könnte noch viele offene Fragen formulieren. Oben klang schon an: Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge? Schärfer als Vinogradov hat **Goldbach** (um 1750) vermutet, daß jede große gerade Zahl die Summe von zwei Primzahlen ist. Dann ist da noch die Riemannsche Vermutung. Das mag genügen.

Motto 1

Gott als das Vonwoher der Fraglichkeit.

W. Weischedel in:

Der Gott der Philosophen, 1979

Motto 2

Gott als das Nachwohin der Antwortigung.

Hannover, im September 1997