Was ist Mathematik (Zusammenfassung)

Weinert, Hanns Joachim

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1989 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.93-96

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Was ist Mathematik

(Zusammenfassung)

Von **Hanns Joachim Weinert**

„Nihil certi habemus in scientia nostra nisi mathematicam."
N. Cusanus (1401–1464)

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und sofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."
A. Einstein (1879–1955)

Natürlich wollte der Verfasser auf die Frage: „Was ist Mathematik?" keine definitive oder gar allgemein akzeptierte Antwort geben. Vielmehr ging es ihm darum, aus seiner Sicht gewisse Grundzüge der Mathematik in ihrer historischen Entwicklung darzustellen und dabei herauszuarbeiten, welche Rolle die jeweiligen Auffassungen über die Mathematik in der Geschichte der Philosohie gespielt haben.

1. Mathematik als verallgemeinerte Erfahrung und als deduktives System

Sicher entstanden die ersten mathematischen Erkenntnisse als induktiv verallgemeinerte Erfahrungen und wurden als Aussagen über den uns umgebenden „real existierenden" Raum oder über das rechnende Umgehen mit konkreten Gegenständen interpretiert. So hat der Verfasser als Schüler erlebt, daß der Satz über die Winkelsumme eines Dreiecks dadurch „begründet" wurde, daß alle Mitschüler beliebige Dreiecke zeichneten und die jeweils von ihnen ermittelten Maße ihrer Winkel addiert wurden. An diesem Beispiel läßt sich leicht zeigen, daß sich dieser Satz eigentlich auf aus der Erfahrung abstrahierte Begriffsbildungen bezieht, die sich gar nicht so leicht präzisieren lassen. Auch macht der aus ihm rein logisch abgeleitete Satz über die Winkelsumme eines Vierecks deutlich, daß man aus bereits vorliegenden mathematischen Aussagen andere mathematische Aussagen als logische Folgerungen beweisen kann. Thales von Milet (um 600 v. Chr.) hat als erster solche Beweise geführt, und die Kraft dieser neuen Weise des Denkens hat die Griechen befähigt, in wenigen Jahrhunderten eine Fülle mathematischen Wissens zu schaffen. Die bewundernswerten Elemente von Euklid (um 300 v. Chr.) enthalten dann auch bereits große Teile der bis ins 15. Jahrhundert bekannten Mathematik, und zwar als ein deduktives System, d.h. rein logisch erschlossen aus wenigen, allgemein akzeptierten Grundbegriffen und Grundaussagen. Dieser Würdigung tut es keinen Abbruch, daß Euklid die Aufzählung der in seinen Beweisen verwendeten Grundaussagen nicht vollständig gelungen ist und daß insbesondere seine Definition der geometrischen Grundbegriffe nur als Anleitungen zu interpretieren sind, diese Begriffe aus unseren räumlichen Erfahrungen durch

Abstraktion zu gewinnen. Denn letzten Endes bezogen sich die abstrakten Sätze der Geometrie doch – so glaubte man jedenfalls – auf den uns umgebenden Raum unserer täglichen Erfahrung.

So schienen es trotz dieser Mängel fast 2 000 Jahre lang klar, daß die Menschheit ein erstes Gebiet realen Wissens etabliert hatte, welches absolut sicher und über jeden Zweifel erhaben war. Das hatte eine kaum zu überschätzende geistesgeschichtliche Wirkung, die jedoch in dieser Zusammenfassung nur angedeutet werden kann. Insbesondere waren die Philosophen der beginnenden Neuzeit, angefangen mit Descartes (1596–1650), davon überzeugt, daß Euklids Elemente den einzig möglichen Weg wiesen, um zu sicherem Wissen zu gelangen – auch über methaphysische Fragen, wie die Existenz und Natur Gottes, die Unsterblichkeit der Seele und die Freiheit des Willens. Ja selbst die kritische Philosophie Immanuel Kants (1724–1804) beruht auf dieser Interpretation von Mathematik.

2. Die Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien

Die problematischste Grundaussage Euklids ist das sogenannte Parallelen-Postulat, welches sich schon durch seine komplizierte Formulierung von allen anderen Grundaussagen unterscheidet und kaum als sofort einsichtige Abstraktion aus dem uns umgebenden Raum angesehen werden kann. So war jahrhundertelang versucht worden, dieses Postulat aus den anderen Grundaussagen Euklids logisch abzuleiten und damit überflüssig zu machen. Die Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien durch C. F. Gauss (1777–1855), J. Bolyai (1802–1860), N. I. Lobatschewski (1793–1856) und F. B. Riemann (1826–1866) zeigte nun, daß man in Euklids System das Parallelen-Postulat durch jeweils ein anderes ersetzen kann und so zwei weitere „mathematische Geometrien“ neben der Euklids erhält. Diese drei Geometrien lassen sich auch dadurch kennzeichnen, daß die Winkelsumme jedes Dreiecks einmal echt kleiner, einmal gleich und einmal echt größer als zwei rechte Winkel ist, wobei die Abweichungen im ersten und dritten Fall mit der Größe des Dreiecks wachsen. Damit wurden diese drei mathematischen Systeme zu in sich konsistenten abstrakten Denkstrukturen, und es entstand die Frage, welche von ihnen dem uns umgebenden Raum entspricht. Gauss versuchte, diese Frage im Rahmen der von ihm geleiteten Landvermessungen zu beantworten. Das verwendete Dreieck (Brocken, Inselsberg, Hoher Hagen) erwies sich jedoch als zu klein, um im Rahmen möglicher Meßgenauigkeiten eine der oben genannten Abweichungen festzustellen oder auszuschließen.

Damit ergibt sich eine völlig neue Situation: Geometrische Grundbegriffe und Grundaussagen, von denen man über 2 000 Jahre angenommen hatte, daß sie Abstraktionen eines einzigen, uns gegebenen wirklichen Raumes wären, konnten auf drei verschiedene Weisen interpretiert werden, und man konnte nicht entscheiden, welche dieser Interpretationen der Wirklichkeit entspricht. Erst damit werden die von Eulid verwendeten Grundlagen, unabhängig von allen Mängeln im Detail, wirklich fraglich. Andererseits braucht man Grundbegriffe und Grundaussagen am Anfang jeder Deduktion. Eine Antwort auf das damit angedeutete Problem wurde von D. Hilbert (Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899) gegeben, womit eine neue Auffassung von Mathematik einsetzt.

3. Mathematik als Gebäude formaler Theorien

Der Aufbau einer formalen mathematischen Theorie wurde an einem einfachen Beispiel erläutert. Man betrachtet verschiedene Sorten von Variablen, etwa $P, Q, \ldots$ und $g, h, \ldots$ (die z.B. „Punkte" bzw. „Geraden" genannt werden können) und gewisse formal zu notierende Relationen zwischen solchen Variablen, etwa $P|g$ (wofür man sagen kann, daß „der Punkt P auf der Geraden g liegt"). Sodann werden eine Reihe von Axiomen formuliert, wie z.B. $\forall g \exists P, Q\ (P \neq Q \wedge P|g \wedge Q|g)$ (wofür man sagen kann, daß „auf jeder Geraden g wenigstens zwei verschiedene Punkte P und Q liegen"). Dabei entsprechen die Variablen und Relationen einer formalen Theorie den Grundbegriffen in Euklids System und die Axiome den Grundaussagen. Jedoch haben in einer formalen Theorie die Variablen und Relationen (trotz der in Klammern angegebenen Sprechweisen) keinerlei inhaltliche Bedeutung. Vielmehr „weiß" man von ihnen nichts weiter, als daß sie den Axiomen der gerade betrachteten Theorie genügen. Darauf aufbauend lassen sich schrittweise weitere Aussagen, die Sätze dieser Theorie, rein logisch deduzieren, wobei natürlich auch die jeweils erlaubten logischen Schlußregeln formal festzulegen sind. Zur Vereinfachung der Schreib- und Sprechweise können dabei auch „echte" Definitionen verwendet werden, z.B. daß $g||h$ als Abkürzung für $\forall P\ (P|g \wedge P|h) \Rightarrow g = h)$ gebraucht wird (wofür man sagen kann, daß „Geraden g und h parallel genannt werden, wenn sie entweder zusammenfallen oder keinen gemeinsamen Punkt haben").

Auf diese Weise wurde im Vortrag eine formale Theorie mit den obigen Variablen, einer Relation $P|g$ und vier Axiomen vorgestellt, welche die formale Theorie der affinen Ebenen genannt wird. Solche Theorien lassen sich dann auf meist sehr verschiedene Fälle, die sogenannten Modelle dieser Theorie, anwenden. Wann immer eine (konkrete oder abstrakte) Situation vorliegt, welche den Variablen oder Relationen einer formalen Theorie so entspricht, daß alle ihre Axiome erfüllt sind, dann gelten auch alle Sätze dieser Theorie in dieser Situation, ohne daß man sie immer wieder erneut abzuleiten brauchte. In diesem Sinne kann eine formale Theorie als ein Vorrat von Resultaten angesehen werden, die in jedem passenden Fall, d.h. eben in jedem ihrer Modelle, anwendbar sind. Der Mathematiker, der eine solche Theorie aufstellt, wird dabei meist ihre verschiedenen möglichen Modelle gar nicht überblicken können. Insbesondere können solche Modelle erst im Zusammenhang mit zukünftigen Anwendungen auftreten, von denen man beim Aufstellen dieser Theorie noch gar nichts wissen konnte. So ist z.B. jede in der euklidischen Geometrie auftretende Ebene ein Modell der formalen Theorie der affinen Ebenen — womit allerdings über euklidische Ebenen noch sehr wenig gesagt ist. Es gibt aber auch Modelle, die nur endlich viele „Punkte" und "Geraden" enthalten (etwa solche mit 4 Punkten und 6 Geraden oder mit 9 Punkten und 12 Geraden), und solche endlichen Modelle finden Anwendung z.B. bei der Organisation komplizierter Versuchsanordnungen oder bei der Verschlüsselung von Nachrichten.

4. Hypothetischer Realismus und evolutionäre Erkenntnistheorie

Es ist oft gesagt worden, daß ein mit formalen Theorien umgehender Mathematiker „gar nicht weiß, wovon er eigentlich spricht". Dem ist zuzustimmen — handelt es sich dabei doch einfach um den Preis, der für die universelle Anwendbarkeit einer formalen Theorie auf alle ihre Modelle zu zahlen ist. Schwieriger ist das Problem, wie sicher die Sätze solcher mathematischer Theorien sind, wenn sie auf die „Wirklichkeit" bezogen, also auf ein Modell in der „realen Welt" angewendet werden. Hier häufen sich die Fragen: Was ist eigentlich die „Wirklichkeit" oder die „reale Welt" oder der schon eingangs verwendete „reale Raum"? Wie überprüft man, ob oder wieweit irgendwelche alltäglichen oder wissenschaftlichen Aussagen über diese Wirklichkeit zutreffen? Und nicht zuletzt: Selbst wenn man sicher wäre, daß ein realer Zusammenhang, aufgefaßt als Modell einer formalen mathematischen Theorie, alle Axiome dieser Theorie erfüllt, woher oder wie sicher weiß man, daß dann auch die innerhalb der Theorie rein logisch abgeleiteten Sätze auf diesen realen Zusammenhang zutreffen? Mit anderen Worten: Woher oder wie sicher weiß man, daß unsere Denk- und Erkenntnisstrukturen zum adäquaten Erfassen der Realität geeignet sind? Und wie weit gilt dies auch dann noch, wenn wir den Bereich der unserer biologischen Existenz entsprechenden Umwelt verlassen und z.B. Kernphysik oder Kosmologie treiben?

Es ist die Überzeugung des Verfassers, daß die oben genannten philosophischen Auffassungen der einzige Schlüssel zu wenigstens einigermaßen befriedigenden Antworten auf diese Frage sind, und daß eine relative Sicherheit unserer wissenschaftlichen Erkenntnis nicht zuletzt auf der Anwendung mathematischer Theorien im Erkenntnisprozeß beruht. Doch bitte er um Verständnis dafür, daß die diesbezüglichen Ausführungen des Vortrages in schriftlicher Ausarbeitung zu umfangreich würden und so nicht im Rahmen dieser Zusammenfassung dargestellt werden können. (Für eine gut lesbare und instruktive Einführung in die genannten philosophischen Theorien sei verwiesen auf: G. Vollmer, Evolutionäre Erkenntnistheorie, S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1980.)