Ueber Gleichungen mit rationalen Coefficienten*).

Von
R. Dedekind (Braunschweig).

Dass solche Sätze über Gleichungen, die für jeden endlichen Grad gelten, nicht ohne weiteres für Gleichungen von unendlich hohem Grade in Anspruch zu nehmen sind, wird zu unserer Zeit wohl von fast allen Mathematikern anerkannt. Da aber die Entscheidung über eine solche Frage bisweilen nicht leicht zu finden ist, so erlaube ich mir im folgenden einen besonderen, nicht unwichtigen Fall zu behandeln. In der Lehre von denjenigen Gleichungen, welche einen endlichen Grad und lauter rationale Coefficienten haben, wird der bekannte Satz bewiesen:

1. Hat die irreducible Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine Wurzel gemein mit der Gleichung $\psi(x) = 0$, so ist jede Wurzel der ersteren Gleichung auch eine Wurzel der letzteren.

Dieser Satz verliert aber, wenn die Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade ist, seine allgemeine Gültigkeit, und zwar selbst für solche Gleichungen, deren linke Seite $\psi(x)$ eine für alle Werthe von x convergirende Potenzenreihe mit rationalen Coefficienten ist. Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem Satze:

2. Ist α irgend eine reelle Zahl, so giebt es eine solche Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem oder auch endlichem Grade, welche α als einzige reelle Wurzel besitzt.

Ist nämlich dies bewiesen, so folgt daraus jedesmal ein offenbarer Widerspruch mit dem Satze 1., wenn man für α eine Wurzel einer irreduciblen Gleichung $\varphi(x) = 0$ (z. B. $x^2 - 2 = 0$) wählt, die mindestens zwei reelle Wurzeln α, β hat. Es kommt also nur noch darauf an, den Satz 2. zu beweisen, und hierbei darf man sich auf den Fall einer positiven Zahl α beschränken, weil auf diesen der entgegengesetzte Fall durch Verwandlung von x in $-x$ zurückgeführt wird; im Falle $\alpha = 0$ kann man natürlich $\psi(x) = x$ nehmen.

Aus jeder positiven Zahl α entsteht — in ähnlicher Weise und mit derselben Bestimmtheit, wie bei der Entwicklung in einen gemeinen Kettenbruch — immer eine Reihe von ganzen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und eine Reihe von zugehörigen Resten, d. h. solchen Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, welche alle der Bedingung

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

genügen, nach folgender Regel: zunächst setze man

*) In Verhinderung des Verfassers durch Herrn G. Cantor vorgelegt.

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \varepsilon_1,$$

wodurch a_1 als die grösste in $\frac{1}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl, also auch ε_1 als Rest bestimmt ist; für jeden grösseren Index n aber setze man

$$\frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2} = a_2 + \varepsilon_2, \quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2} = a_3 + \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \frac{n\varepsilon_{n-1}}{\alpha^2} = a_n + \varepsilon_n, \quad \ldots,$$

wodurch auch alle folgenden Zahlen a als grösste Ganze und alle Reste ε vollständig bestimmt sind; zugleich leuchtet ein, dass von den Zahlen a keine negativ ist. Dann besitzt die vollkommen definirte Function

$$\psi(x) = -1 + a_1\frac{x}{1} + a_2\frac{x^3}{1.2} + a_3\frac{x^5}{1.2.3} + \cdots + a_n\frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)} + \cdots$$

alle im Satze 2. angegebenen Eigenschaften. In der That:

1) Die Coefficienten von $\psi(x)$ sind sämtlich rationale Zahlen.

2) Da $\varepsilon_{n-1} < 1$, also $a_n < \frac{n}{\alpha^2}$, so ist das allgemeine Glied der Reihe $\psi(x)$ absolut kleiner als

$$\frac{x}{\alpha^2} \cdot \frac{(x^2)^{n-1}}{\Pi(n-1)},$$

woraus bekanntlich folgt, dass die Reihe $\psi(x)$ (wie die Exponentialreihe) für jeden Wert von x convergirt.

3) Aus den Definitionen der Zahlen a und ε folgt, dass die aus $(n+1)$ Gliedern bestehende Summe

$$-1 + a_1\frac{\alpha}{1} + a_2\frac{\alpha^3}{1.2} + a_3\frac{\alpha^5}{1.2.3} + \cdots + a_n\frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)} = -\varepsilon_n\frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)}$$

ist, und da die rechte Seite mit unendlich wachsendem n unendlich klein wird, so folgt $\psi(\alpha) = 0$, d. h. α ist eine Wurzel der Gleichung $\psi(x) = 0$.

4) Da von den Zahlen a keine negativ, wohl aber mindestens eine positiv ist (wie aus $\psi(\alpha) = 0$ hervorgeht), da ferner, abgesehen von dem constanten Gliede -1, die Variable x in der Reihe $\psi(x)$ nur in Potenzen mit ungeraden Exponenten auftritt, so wird gleichzeitig mit x auch $\psi(x)$ das ganze reelle Gebiet von $-\infty$ bis $+\infty$ stets wachsend durchlaufen und folglich auch nur für den einzigen Wert $x = \alpha$ den Wert Null erhalten; d. h. die Gleichung $\psi(x) = 0$ hat ausser α keine reelle Wurzel, w. z. b. w.

Hiermit ist die Unzuverlässigkeit des Satzes 1. für Gleichungen $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade erwiesen. Dieser Nachweis ist wohl nicht ganz wertlos, weil verschiedene Mathematiker auf den Gedanken gekommen sind, durch Anwendung dieses unzuverlässigen Satzes auf das Beispiel $\psi(x) = \sin x$ einen Beweis für die Transcendenz der Zahl π zu gewinnen, der offenbar nur wenige Zeilen erfordern würde.

Der Beweis des Satzes 2. lässt sich, wie man leicht sieht, in der mannigfaltigsten Weise abändern; zugleich leuchtet ein, dass dieser Satz auch für jede endliche Anzahl von vorgeschriebenen reellen Wurzeln α gilt.

(Separatabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. I. 1892.)
Druck und Verlag von Georg Reimer in Berlin.