Mittels des Gaußschen Integralsatzes erhält man aus (27) den

SATZ 2: Sei $\Psi = X(B) \subset E^3$ $(B \subset \mathbb{R}^2)$ *ein reguläres, nabel- und flachpunktfreies, einfach zusammenhängendes und von einer einfach geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurve* $c = \partial\Psi$ *berandetes* C^3*-Flächenstück mit dem Oberflächenelement do und den Hauptkrümmungen* κ_1 *und* κ_2. *Bezeichnen* ds_1 *und* ds_2 *die Bogenelemente und* κ_{1g} *und* κ_{2g} *die orientierten geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien von* Ψ, *so gelten die Integralformeln:*

$$\boxed{\begin{aligned} K_1 &= \iint_\Psi \kappa_1\kappa_2 do = -\oint_c (\kappa_{1g}ds_1 + \kappa_{2g}ds_2), \\ K_2 &= \iint_\Psi \kappa_{1g}\kappa_2 do = \oint_c \kappa_1 ds_1, \\ K_3 &= \iint_\Psi \kappa_{2g}\kappa_1 do = \oint_c \kappa_2 ds_2, \end{aligned}} \tag{28}$$

Ist die Randkurve c eine C^2*-Kurve mit dem Bogenelement ds und der orientierten geodätischen Krümmung* κ_g, *so folgt aus der Darstellung der Gesamtkrümmung* K_1 *in* (28) *mittels der Integralformel von Gauß-Bonnet:*

$$\oint_c (\kappa_g ds - \kappa_{1g}ds_1 - \kappa_{2g}ds_2) = 2\pi\,. \tag{29}$$

Bemerkung 4: Man betrachte die in Satz 1 angegebene Situation. Ist Ψ eine orientierbare geschlossene C^3-Fläche, so besitzt Ψ notwendigerweise das Geschlecht $p = 1$, da andernfalls stets Nabel- oder Flachpunkte auftreten (siehe etwa [2], S. 250). Aufgrund der Formeln (28) erkennt man (etwa mittels einer Triangulation von Ψ), daß in diesem Fall nicht nur die Gesamtkrümmung K_1, sondern auch K_2 und K_3 verschwinden. Die Endpunkte der flächenbegleitenden Strecken h, die dasselbe Volumen ausfegen, liegen nun – anders als im allgemeinen Fall (siehe Bemerkung 2.) – auf einer Quadrik. Dies steht in Übereinstimmung mit dem von H.R. Müller in [5], S. 45 angegebenen Satz 1.

Literatur

[1] Blaschke, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie, 3. Auflage, Berlin (1955).

[2] Blaschke, W./Leichtweiß, K.: Elementare Differentialgeometrie, 5. Auflage, Berlin – Heidelberg – New York (1973).

[3] Blaschke, W./Müller, H.R.: Ebene Kinematik, München (1956).

[4] Cartan, H.: Differentialformen, Mannheim – Wien – Zürich (1974)

[5] Müller, H.R.: Über den Rauminhalt kinematisch erzeugter, geschlossener Flächen, Arch. Math., Vol. 38, 43–49 (1982).

[6] Stoker, J.J.: Differential Geometry, New York – London – Sydney – Toronto (1969).