

# Über elektromagnetische Ursachen von Laufstörungen in Antrieben mit Induktionsmotoren

Früchtenicht, Jürgen  
Jordan, Heinz  
Seinsch, Hans Otto

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 31, 1980,  
S.57-72



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

# **Über elektromagnetische Ursachen von Laufruhestörungen in Antrieben mit Induktionsmotoren**

Von **Jürgen Früchtenicht, Heinz Jordan** und **Hans Otto Seinsch**, Hannover

eingegangen am 11. 4. 1980

## **1. Einführung**

Antriebe mit elektrischen Maschinen sind im Laufe der Zeit aus verschiedenen Gründen immer empfindlicher gegen Schwingungsanregungen geworden. Wesentliche Erkenntnisfortschritte vor allem bei den Oberwellenerscheinungen, der Einsatz höherwertiger Isolationsmaterialien und entscheidende Verbesserungen der Kühlsysteme führten allein in den letzten 10 Jahren zu einer Verringerung des aktiven Materialeinsatzes bei größeren Drehstrom-Induktionsmaschinen in der Größenordnung von 50%. Nicht zuletzt aus wirtschaftlichen Gründen wurden auch die inaktiven Konstruktionsteile, insbesondere die Gehäuse und Fundamentrahmen, immer leichter ausgeführt. Laufruhestörungen äußern sich vor allem in Vibrationen der Lager und des Gehäuses. Die Schwingungsamplituden können in ungünstigen Fällen so groß werden, daß der Läufer in der Ständerbohrung anstreift und einen schweren Folgeschaden einleitet.

Viele der in der Praxis beobachteten überhöhten Schwingungsbeanspruchungen sind auf Konstruktions- oder Fertigungsmängel (z.B. Wuchtfehler) zurückzuführen. Wenn man von diesen „Primitiv“-Ursachen absieht, lassen sich unzulässig hohe Schwingungen in zwei Gruppen einteilen:

- Resonanzerscheinungen durch Annäherung der Drehfrequenz an eine Eigenfrequenz des mechanischen Systems,
- Instabilitäten aufgrund elektromagnetischer Erscheinungen.

Die erstgenannte Kategorie spielt vor allem bei vertikalen Anordnungen eine Rolle, bei welchen die niedrigste System-Eigenfrequenz durch den ruhenden Teil (z.B. Motorständer mit unterbauter Pumpenlaterne) bestimmt ist [15]. In dieser Arbeit sollen durch elektromagnetische Einflüsse bewirkte Schwingungsanfahrungen der Läuferwelle unter Annahme isotroper, starrer Einspannung an den Lagerstellen untersucht werden. Der Übersichtlichkeit wegen werden die Erscheinungen am Modell einer Laval'schen Welle (Bild 1) behandelt. Für die Untersuchung praktischer Antriebe muß natürlich die in Achsrichtung un stetige Verteilung der Massenträgheitsmomente und Zusatzmassen berücksichtigt werden. Dies fördert jedoch keine grundlegend neuen Erkenntnisse zutage. Die Wirkungen der Anisotropie von Lagerungen und der Einfluß des Grundrahmens (Bild 2) sind aus der Literatur [1, 2, 3]

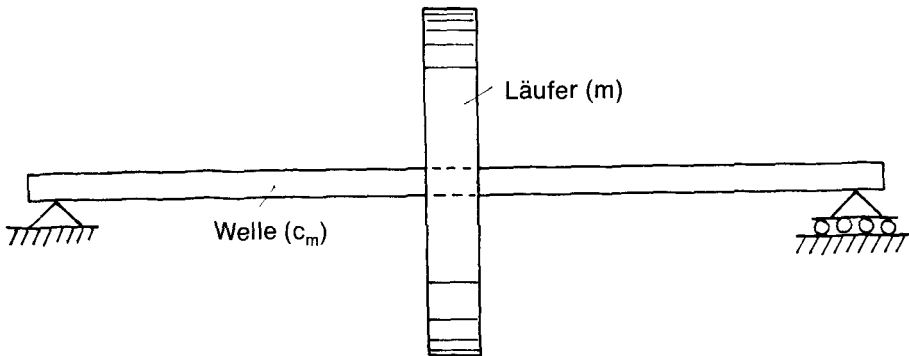


Bild 1:  
Laval'sche Welle als Modell eines Läufers

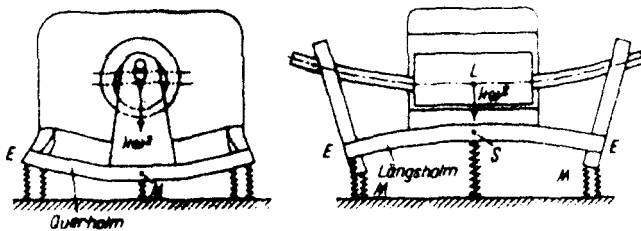


Bild 2:  
Biege- und Drillverformungen eines Maschinengrundrahmens  
bei Anregung in senkrechter Richtung

bekannt und können relativ einfach auf das hier behandelte Modell übertragen werden.

Wenn eine Drehfeldmaschine am Netz liegt, so werden durch die im Luftspalt zwischen Ständer und Läufer vorhandenen magnetischen Felder Kräfte in tangentialer und radialer Richtung wirksam. Die zeitlich konstanten Tangential-Kräfte führen zu dem für das erwünschte Betriebsverhalten maßgebenden Drehmoment, welchem sich um den Mittelwert Null schwankende Pendelmomente überlagern. Die radial wirkenden Zugspannungen entstehen aus dem Übertritt des magnetischen Feldes von einem hochpermeablen Stoff (Eisen) in Luft und besitzen im allgemeinen Fall als Funktion des Umfangswinkels  $x$  und der Zeit  $t$  die Form

$$\sigma_r(x, t) = \hat{\delta} \cdot \cos(vx - \omega_v t - \varphi_v). \quad 1)$$

Solche Drehkraftwellen regen die Blechpakete von Ständer und Läufer zu Schwingungen an und stellen die Ursache des elektromagnetisch erregten Lärms dar, der von außerordentlicher praktischer Bedeutung, jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist. Für die Laufgüte spielen Radialkraftwellen mit Polpaarzahlen  $\nu > 1$

nur gelegentlich eine Rolle: Einen solch wichtigen Ausnahmefall stellen z. B. die vom Maschinenhauptfeld bei 2-poligen Maschinen ausgehenden Anregungen ( $\nu = 2$ ,  $\omega_\nu = 2 \cdot \omega_{\text{Netz}}$ ) dar.

Das Schwingungsverhalten aufgrund elektromagnetischer Einflüsse wird hauptsächlich durch Anregungen mit  $\nu = 1$ , die sog. Rüttelkräfte, bestimmt. Es zeigt sich, daß bei einem exzentrischen Versatz des Läufers in der Ständerbohrung Rüttelkräfte entstehen, welche in erster Näherung in Richtung der engsten Luftspaltstelle wirken und zeitlich konstant sind. Man spricht von einseitig magnetischen Zugkräften, deren Existenz seit Jahrzehnten bekannt ist. Man hat sie ursprünglich wie auf das System einwirkende äußere Kräfte behandelt, welche beispielsweise die statische Wellendurchbiegung vergrößern. Erst später erkannte man den Einfluß der von Exzentrizitäten ausgehenden Kraftwirkungen auf die Eigenfrequenz des Läufers. Die einseitig magnetischen Zugkräfte wachsen nämlich näherungsweise linear mit der Exzentrizität an. Man kann sie deshalb im mechanischen Ersatzschaltbild als Feder auffassen, deren Federzahl jedoch negativ zu zählen ist, weil die einseitig magnetischen Zugkräfte den elastischen Rückstellkräften entgegenwirken, d. h. sie versuchen eine Auslenkung der Welle aus der zentrischen Lage weiter zu vergrößern. Wenn man bei einer Laval'schen Welle die mechanische Federzahl mit  $c_m$  und die wirksame Läufermasse mit  $m$  bezeichnet, so lautet unter Einfügung der negativen elektromagnetischen Federzahl  $c_e$  die Gleichung für die Biegeeigenschwingungsfrequenz der Welle

$$f_{ee} = \frac{\omega_{ee}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{c_m - c_e}{m}} \quad 2)$$

Die Verkleinerung der biegekritischen Drehzahl durch  $c_e$  erreicht bei realen Maschinen durchaus die Größenordnung 30%.

In Gl. 2) sind Dämpfungseinflüsse, welche bekanntlich die Eigenfrequenzen eines Systems nicht wesentlich beeinflussen, vernachlässigt. Mit dem Begriff Dämpfung verknüpft man im üblichen Sprachgebrauch die Vorstellung eines Abklingens von freien Schwingungen. Man hat jedoch schon früh erkannt, daß bei Maschinen mit Gleitlagern hydrodynamisch angefachte Biegeeigenschwingungen des Läufers [4] auftreten können. Aber auch die im körperfesten System stets positive innere Dämpfung des Läufers (Reibung der Bleche untereinander und auf der Welle sowie Werkstoffdämpfungen der Welle selbst) wirkt sich bei Überschreiten der tiefsten biegekritischen Drehzahl im raumfesten Koordinatensystem erstaunlicherweise negativ [5], d. h. schwingungsanfachend, aus.

Auch bei sorgfältiger Beachtung der bisher erwähnten, bekannten Erscheinungen sind gelegentlich Störungen der Laufruhe beobachtet worden, welche eindeutig elektromagnetischen Einflüssen zuzuordnen waren, welche sich jedoch mit den bisher bekannten Erkenntnissen nicht erklären und nicht beheben ließen. Über einige der auf diesem Gebiet in jüngster Zeit erarbeiteten Ergebnisse soll in diesem Aufsatz berichtet werden. Die analytische Behandlung der Problematik würde sich außerordentlich kompliziert und unübersichtlich gestalten, wenn man für den allgemeinen Fall einer sich drehenden, exzentrisch versetzten Welle, deren Dreh- und Schwer-

punkt nicht zusammenfallen, und welche von elektromagnetischen Radial- und Tangentialkräften beaufschlagt wird, das System der Bewegungsdifferentialgleichungen aufstellen und lösen würde. Drill- und Biegeschwingungen treten dann stets gleichzeitig auf und hängen voneinander ab. Um den physikalischen Kern offenzulegen, empfiehlt sich, die beiden Schwingungen jeweils für sich zu betrachten.

Über den Einfluß der elektromagnetischen Vorgänge auf Drillschwingungen beim Anlauf von starr oder drehelastisch gekoppelten Aggregaten mit Drehstrom-Antrieben wurde kürzlich an anderer Stelle ausführlich berichtet [13, 14]. Dieser Aufsatz soll deshalb zunächst einen Überblick über den Einfluß von Exzentrizitätsfeldern auf Biegeschwingungen der Welle geben. Zum besseren Verständnis der Vorgänge wird in Abschnitt 2 abgeleitet, wie sich die einseitig magnetischen Zugkräfte unter der abdämpfenden Wirkung der Käfigwicklung bei Induktionsmaschinen verändern gegenüber dem Fall, daß der Läufer lediglich als magnetischer Rückschluß dient. In Abschnitt 3 wird nachgewiesen, daß hierdurch eine Änderung der Kraftwirkungsrichtung eintritt, und bezogen auf das mechanische System die einseitig magnetischen Zugkräfte durch eine elektromagnetische Federzahl und eine elektromagnetische Dämpfung nachgebildet werden müssen. Die elektromagnetische Dämpfung kann in bestimmten Bereichen negativ werden und einen solchen Betrag annehmen, daß eine Entdämpfung des gesamten Schwingungssystems eintritt. Sowohl an einer dem Laval'schen Modell entsprechenden Versuchseinrichtung als auch an realen Maschinen wurde in Einklang mit der Theorie beobachtet, daß Induktionsmaschinen mit Käfigläufer Biegeschwingungen mit der niedrigsten Eigenschwingungsfrequenz ausführen können, wobei die Eigenschwingungs- und die Drehzahlfrequenz in keinem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Durch diese Entdämpfung kann es in kritischen Fällen zum Anstreifen des Läufers in der Ständerbohrung kommen.

Die erwähnte Verknüpfung zwischen Dreh- und Biegeschwingungen wird in Abschnitt 4 aufgezeigt. Am Läuferumfang angreifende Pendelmomente, ausgelöst beispielsweise durch Läuferunsymmetrien, erregen in Verbindung mit einer Exzentrizität des Läuferschwerpunktes parametrische Biegeschwingungen. Es wird gezeigt, wie sich die biegekritische Drehzahl durch solche Einflüsse verändert.

## 2. Einseitig magnetische Zugkräfte

In Bild 3 ist angenommen, daß der statisch exzentrisch versetzte Läufer Biegeschwingungen der Kreisfrequenz  $\omega_{ee}$  in Richtung der engsten Luftspaltstelle ausführt. Der magnetische Leitwert des Luftspaltes läßt sich mit der Abkürzung  $\delta_m = R - r$  näherungsweise als die Überlagerung eines konstanten Leitwertes und einer Leitwertdrehwelle der Polpaarzahl 1 darstellen

$$\Lambda(x, t) = \frac{\mu_0}{\delta_m} \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot \cos \{x - \omega_{ee} \cdot t - \varphi_{ee}\}). \quad (3)$$

Der Magnetisierungs-Grundstrombelag der Maschine

$$a_{p_0}(x, t) = A_{p_0} \cdot \cos(p x - \omega_1 \cdot t - \varphi_{p_0}) \quad (4)$$

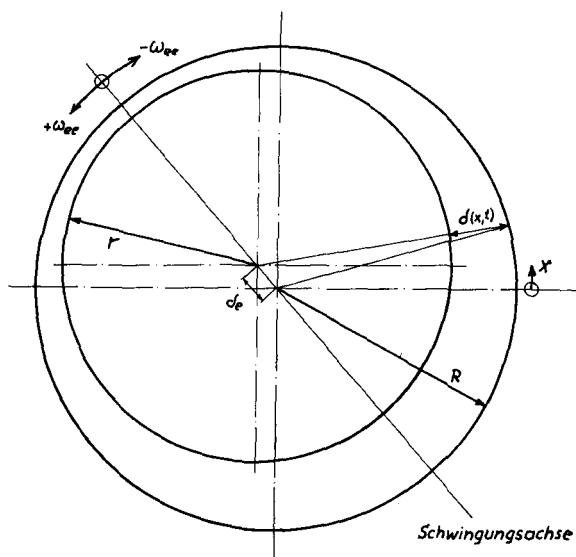


Bild 3:  
Exzentrische Verlagerung des Läufers in der Ständerbohrung  
bei einer Biegeeigenschwingung der Welle

( $p$  = Polpaarzahl der Maschine,  $\omega_1$  = Netz-Kreisfrequenz) erregt nach dem Durchflutungsgesetz

$$b(x, t) = \Lambda(x, t) \cdot \int a(x, t) \cdot R \, dx \quad (5)$$

im Zusammenwirken mit den Leitwertschwankungen der Polpaarzahl 1 die sog. Exzentrizitäts-Grundfelder

$$b_{p\pm 1}(x, t) = B_{p\pm 1} \cdot \cos \{ (p \pm 1) x - (\omega_1 \pm \omega_{ee}) t - (\varphi_{p0} \pm \varphi_{ee}) \} \quad (6)$$

$$= \mathbf{R}_e \{ B_{p\pm 1} \cdot e^{j \{ (p \pm 1) x - (\omega_1 \pm \omega_{ee}) t - (\varphi_{p0} \pm \varphi_{ee}) \}} \} = \mathbf{R}_e \cdot \{ B_{p\pm 1} \cdot \}$$

Durch Gl. 6) werden die resultierenden Exzentrizitätsfelder beschrieben, wenn keine Rückwirkung des Läufers erfolgt, Oberstrombeläge und Leitwertschwankungen mit Polpaarzahlen größer 1 außer acht gelassen werden. Bei Induktionsmotoren mit Käfigläufer induzieren die primär erregten Felder nach Gl. 6) in der Läuferwicklung jedoch Spannungen und haben Dämpferströme zur Folge. Hierdurch erfahren die primär erregten Felder eine Änderung des Betrages und der Phasenlage. Die resultierenden, abgedämpften Exzentrizitäts-Grundfelder lassen sich allgemein in der Form schreiben

$$\mathbf{B}_{p\pm 1}^{\text{res}} = a_{p\pm 1} \cdot \mathbf{B}_{p\pm 1} = (\alpha_{p\pm 1} + j \delta_{p\pm 1}) \cdot \mathbf{B}_{p\pm 1} \quad (7)$$

Auf die schreibintensive Herleitung der Komponenten  $\alpha_{p\pm 1}$  bzw.  $\delta_{p\pm 1}$  des komplexen Dämpfungsfaktors als Funktion der geometrischen Läufer-Abmessungen soll hier verzichtet werden.

Wenn man die Blechpakete von Ständer und Läufer als hochpermeabel ( $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ ) auffaßt, so entstehen an der Trennfläche zwischen Eisen und Luftspalt mechanische Zugspannungen, welche nach Maxwell

$$\sigma_r(x, t) = \frac{(\sum b(x, t))^2}{2 \cdot \mu_0} \quad 8)$$

betragen. Radialkraftwellen der Polpaarzahl 1 und damit einseitig magnetische Zugkräfte können nach den Additionstheoremen nur aus dem Zusammenwirken der Exzentrizitätsfelder mit den Polpaarzahlen  $p \pm 1$  und des Maschinenhauptfeldes der Polpaarzahl  $p$

$$b_p(x, t) = B_p \cdot \cos(px - \omega_1 t - \varphi_p) \quad 9)$$

entstehen. Aus der Integration der Zugspannung über den Läuferumfang erhält man schließlich die resultierende Radialkraft

$$\begin{aligned} R_{p\pm 1}(x, t) = R_r \cdot \{ & (\alpha_{p+1} + \alpha_{p-1}) \cdot \cos(\omega_{ee} \cdot t + \varphi_{ee}) \\ & + (\delta_{p+1} - \delta_{p-1}) \cdot \sin(\omega_{ee} \cdot t + \varphi_{ee}) \}. \end{aligned} \quad 10)$$

Man kann einfach zeigen, daß bei Vernachlässigung der Abdämpfung oder auch bei Maschinen mit symmetrischer Drehstromwicklung im Läufer (z.B. Induktionsmotoren mit Schleifringläufer), in denen durch die Exzentrizitäts-Grundfelder keine Spannung induziert wird, der zweite Summand in Gl.10) zu Null wird und  $\alpha_{p\pm 1} = 1$  ist. Da die Amplituden der Exzentrizitäts-Grundfelder  $B_{p\pm 1}$  bei kleinen Auslenkungen proportional der Exzentrizität sind, wirken sich diese Felder dann mechanisch wie eine lineare Feder aus, deren Einfluß auf die Eigenfrequenzen der Läuferwelle durch Gl. 2) beschrieben wird.

### 3. Elektromagnetisch bewirkte Lauf-Instabilitäten

Der Zeitzeiger  $\mathbf{r}$  des vom Bohrungsmittelpunkt zum Läufermittelpunkt gerichteten Radiusvektors nach Bild 3 und seine zeitliche Ableitung, die Bahngeschwindigkeit des Wellenmittelpunktes, folgen den Beziehungen

$$\mathbf{r} = \delta_e \cdot e^{j\omega_{ee} \cdot t}; \quad \dot{\mathbf{r}} = j \omega_{ee} \cdot \mathbf{r}. \quad 11)$$

Wie bereits beim Anschreiben von Gl. 3) für die Luftspalt-Leitwertschwankung ist bei der formalen Zerlegung der Schwingung in der in Bild 3 eingezeichneten Achse in zwei gegenläufige Drehbewegungen halber Amplitude nur die Komponente in Richtung der Läuferdrehung berücksichtigt worden. Schreibt man die einseitig magnetische Zugkraft entsprechend Gl.10) ebenfalls in komplexer Form,  $R_{p\pm 1}(x, t) = R_e \{R_{p\pm 1}(x, t)\}$ , so ergibt sich aus einfachen Umformungen

$$R_{p\pm 1}(x, t) = R_r \cdot \{ (\alpha_{p\pm 1} + \alpha_{p-1}) \cdot \mathbf{r} - (\delta_{p\pm 1} - \delta_{p-1}) \cdot \frac{1}{\omega_{ee}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \} = c_e \cdot \mathbf{r} + d_e \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad 12)$$

Der erste Summand in Gl. 12) entspricht im mechanischen Analogiesystem einer auslenkungsproportionalen Federkraft und der zweite Summand einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft.

In raumfesten Koordinaten lautet demnach die komplexe Bewegungsdifferentialgleichung der freien Schwingung des Wellenmittelpunktes für eine Laval'sche Welle

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}} + (d_a + d_i + d_e) \cdot \dot{\mathbf{r}} + (c_m + c_e - j \omega_{ee} \cdot d_i) \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (13)$$

Durch äußere Dämpfungen entsteht stets eine geschwindigkeitsproportionale Kraft  $d_a \cdot \dot{\mathbf{r}}$ . Aus Messungen von Kimball [16] bzw. Föppl und Schaaf [17] ist zu entnehmen, daß bei der inneren Dämpfung  $d_i$  als Folge der Materialhysterese immer nur eine dem Ausschlag proportionale Dämpfungskraft auftritt. In Gl. 13) ist hingegen nur die geschwindigkeitsproportionale innere Dämpfung berücksichtigt; der mit  $\mathbf{r}$  verknüpfte Term entsteht aus der Transformation der inneren Dämpfungskräfte in ein ruhendes Koordinatensystem. Auf den unterschiedlichen Einfluß der inneren und der äußeren mechanischen Dämpfung hat erstmalig Tondl [5] hingewiesen. In [10] sind entsprechende Stabilitätsbetrachtungen auch auf biegekritische Drehzahlen höherer Ordnung ausgedehnt worden. Sobald die resultierende Dämpfung des Systems negativ wird, tritt eine Schwingungsanfachung ein. Aus Gl. 13) folgt deshalb unmittelbar, daß der Größe und dem Vorzeichen der elektromagnetischen Dämpfung  $d_e$  eine sehr wichtige Bedeutung zukommt. In [12] wird gezeigt, daß die elektromagnetische Dämpfung stets als äußere Dämpfung wirkt. Für die beiden Grenzfälle der rein ausschlagproportionalen bzw. rein geschwindigkeitsproportionalen inneren Dämpfung wurden in Bild 4 die sog. Stabilitätskarten gezeichnet. Daß die elektromagnetische Dämpfung von Bedeutung für die Laufgüte einer Drehfeldmaschine ist, wurde erstmals für den Fall paralleler Wicklungszweige von Kronld [11] erwähnt.

Die in Gl. 12) eingeführte elektromagnetische Federzahl  $c_e$  und die elektromagnetische Dämpfung  $d_e$  hängen außer von Maschinenkonstanten vom Oberfeldschlupf der Exzentrizitätsfelder

$$s_{p\pm 1} = 1 \pm \frac{\omega_{ee}}{\omega_1} \mp \left(1 \pm \frac{1}{p}\right) \cdot (1 - s) \quad (14)$$

ab und stellen somit eine Funktion des Schlupfes  $s$  bzw. der Drehzahl dar. In den Bildern 5 und 6 wurde eine Auswertung vorgenommen für eine Versuchsanlage mit einem 4-poligen Käfigläufer, welche so konzipiert ist, daß sie einerseits dem Modell der Laval'schen Welle gut entspricht und andererseits hinsichtlich der Lage der biegekritischen Drehzahl der ersten Eigenform von  $1780 \text{ min}^{-1}$  die Verhältnisse einer Großmaschine nachbildet. Die elektromagnetische Dämpfung durchläuft in bestimmten Drehzahlbereichen unterhalb und oberhalb der synchronen Drehzahl negative Werte, bei denen also prinzipiell mit Schwingungsanfachungen zu rechnen ist. Aus den Federzahlen nach Bild 5 wurde die Eigenkreisfrequenz nach Gl. 2) bezogen auf die mechanische Eigenkreisfrequenz  $\omega_m$  berechnet und in Bild 7 als Funktion der Drehzahl aufgetragen.

In Bild 8 ist für den am Netz liegenden und den magnetisch unerregten Motor der oszillographierte Verlauf der Schwingungsamplituden als Funktion der Drehzahl



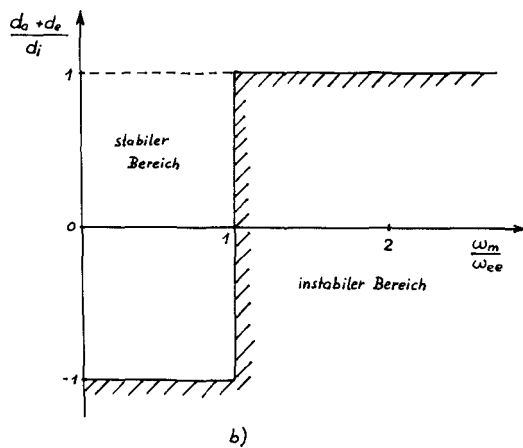
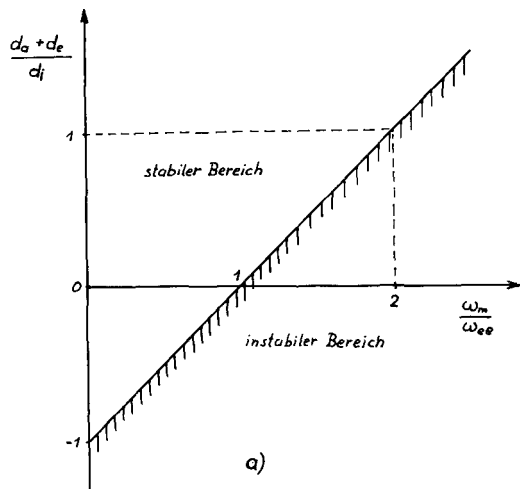


Bild 4:

Stabilitätskarte der Biegeschwingungen eines Läufers unter Berücksichtigung der elektromagnetischen Dämpfung  $d_e$

a) für geschwindigkeitsproportionale innere Dämpfung  $d_i$

b) für ausschlagproportionale innere Dämpfung  $d_i$

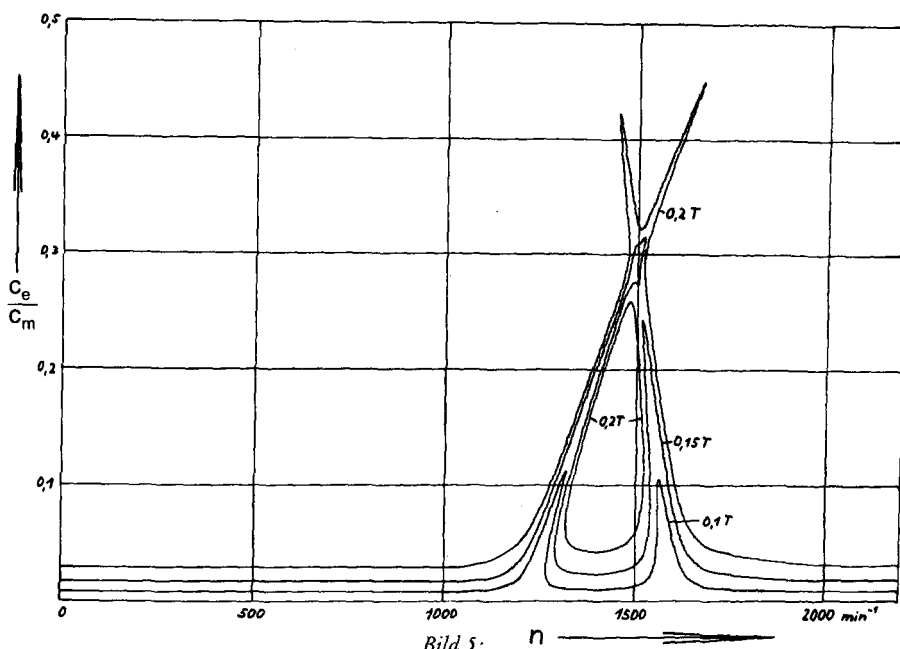


Bild 5: Drehzahlabhängiger Verlauf der berechneten elektromagnetischen Federzahl für eine vierpolige Modellmaschine bei Grundfeld-Induktionsamplituden zwischen 0,1 und 0,2 T;  $f_1 = 50$  Hz

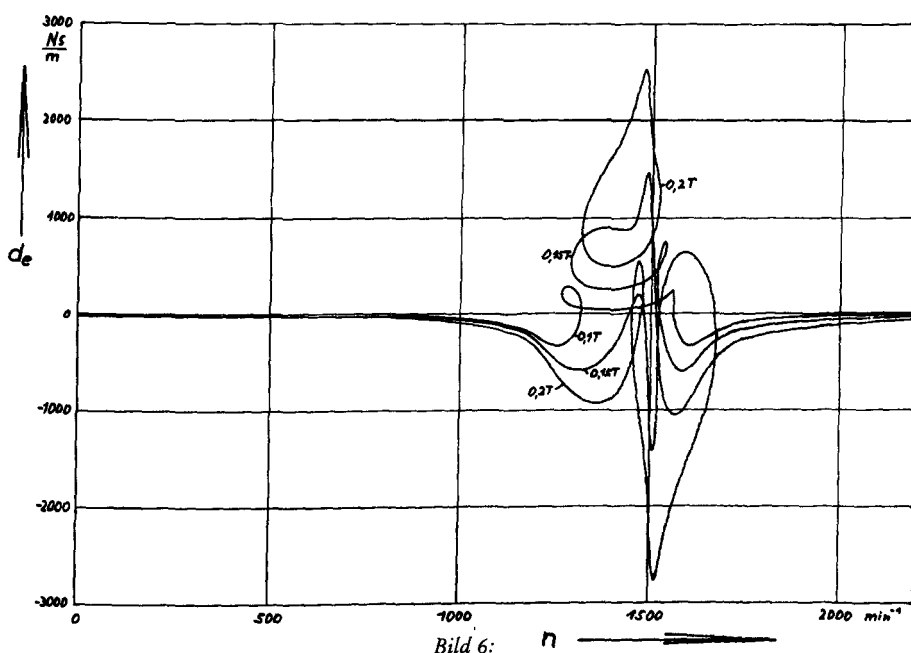


Bild 6: Drehzahlabhängiger Verlauf der berechneten elektromagnetischen Dämpfung für eine vierpolige Modellmaschine bei Grundfeld-Induktionsamplituden zwischen 0,1 und 0,2 T;  $f_1 = 50$  Hz

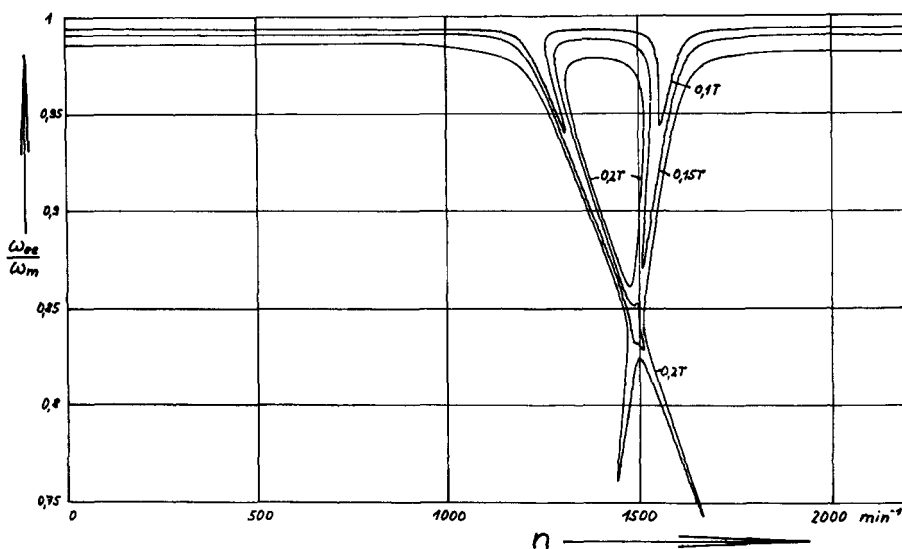
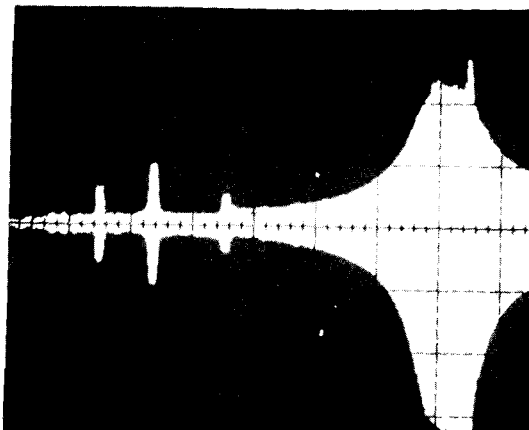


Bild 7:

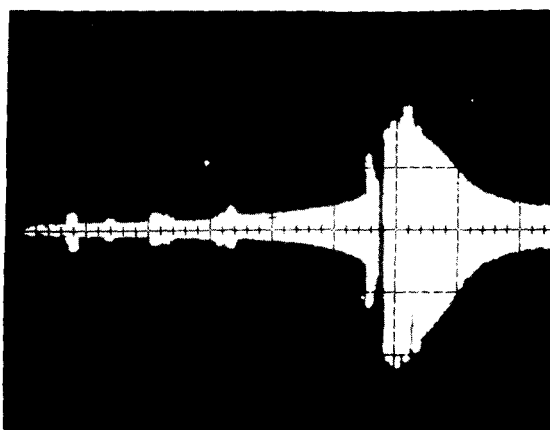
*Drehzahlabhängiger Verlauf der resultierenden Biegeeigenkreisfrequenz für eine vierpolige Modellmaschine bei Grundfeld-Induktionsamplituden zwischen 0,1 und 0,2 T;  $f_1 = 50$  Hz*

dargestellt. Wie erwartet, geht die biegekritische Drehzahl auf ca.  $1500 \text{ min}^{-1}$  unter der Wirkung der elektromagnetischen Federzahl zurück. Man erkennt auch, daß die im unerregten Zustand deutlich sichtbaren Amplitudenüberhöhungen von subharmonisch angeregten Schwingungen durch das Auftreten der elektromagnetischen Vorgänge stark unterdrückt werden. Eine durch die negative elektromagnetische Dämpfung bewirkte Instabilität ist in Bild 8 b noch nicht erkennbar. Bei einer Steigerung der Luftspaltinduktion auf  $B_p = 0,2 \text{ T}$  – die im Vergleich zu normalen elektrischen Maschinen sehr geringen Werte der Luftspaltinduktion hängen mit den Besonderheiten des Modells zusammen – wurde ein Verlauf der Schwingungsamplituden nach Bild 9 oszillographiert. Bei einer Drehzahl von  $1270 \text{ min}^{-1}$  kommt es zum Anstreifen des Läufers in der Ständerbohrung. Unmittelbar vor dem Anstreifen wurde die Wellenschwingung in ihrem Zeitverlauf oszillographiert. Sie erwies sich als praktisch rein sinusförmig von der Frequenz  $1690 \text{ min}^{-1}$ , welche genau der biegekritischen Drehzahl bei der eingestellten Luftspaltinduktion entspricht (vgl. Bild 7). Durch eine Reihe weiterer Versuche, über welche an anderer Stelle ausführlich berichtet wird, konnte erhärtet werden, daß durch die Wirkung des einseitig magnetischen Zuges Biegeeigenoscillationen auch fernab von der biegekritischen Drehzahl und allen subharmonischen Anregungsdrehzahlen auftreten können. Die Drehzahl, bei welcher die Entdämpfung wirksam wird und bei der ein Anstreifen des Läufers in der Ständerbohrung nicht auszuschließen ist, hängt von der Größe der negativen elektromagnetischen Dämpfung ab und steht deshalb in keinem ganzzahligen Viel-



8 a): bei unerregtem Motor

Bild 8:  
 Drehzahlabhängiger Verlauf der Biegeschwingsamplituden des Läufers  
 einer vierpoligen Modellmaschine  
 vertikal: 0,2 mm pro Div.; horizontal: 250 U/min pro Div.



8 b): bei einer Grundfeld-Induktionsamplitude von 0,15 T;  $f_1 = 50$  Hz

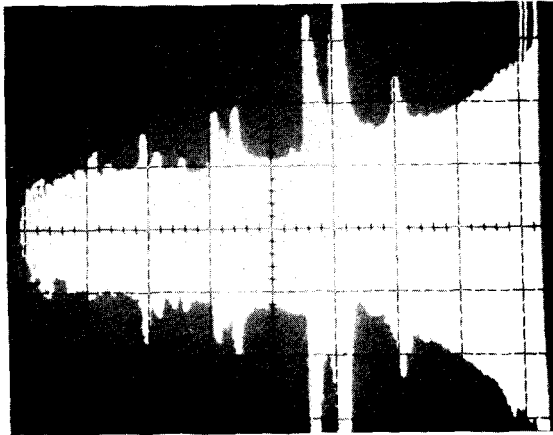


Bild 9:

*Drehzahlabhängiger Verlauf der Biegeschwingsamplituden des Läufers einer vierpoligen Modellmaschine bei einer Grundfeld-Induktionsamplitude von 0,2 T;  $f_1 = 50$  Hz  
vertikal: 0,1 mm pro Div.; horizontal: 150 U/min pro Div.*

fachen zur biegekritischen Drehzahl der ersten Eigenform oder deren Subharmonischen. Derartige elektromagnetisch angefachte Biegeschwingungen von Eigenschwingungsfrequenz konnten auch an einem realen Motor mit  $P_n = 400$  kW,  $U_n = 6000$  V,  $2p = 2$  nachgewiesen werden. Diese bisher unbekanntenen elektromagnetischen Ursachen von Lauf-Instabilitäten werden zur Klärung von nach dem bisherigen Erkenntnisstand undurchsichtigen Störungsfällen beitragen.

#### 4. Einfluß von Pendelmomenten auf die Biege-Eigenfrequenzen

In Bild 10 ist unter Beibehaltung des Modells der Laval'schen Welle angenommen, daß auf den Läufer ein zeitlich periodisch schwankendes äußeres Drehmoment beliebiger Herkunft von der Form

$$M_w = \hat{M}_w \cdot \sin(\omega_w \cdot t + \varphi_w) \quad (15)$$

einwirkt. Wenn die um den zeitlichen Mittelwert Null schwankenden Pendelmomente mechanische Ursachen besitzen, beispielsweise aus dem Drehkraftdiagramm von Kolbenverdichtern resultieren, steht ihre Frequenz normalerweise in einem festen Verhältnis zur Drehzahlfrequenz [8]. Elektromagnetisch erregte Pendelmomente z. B. verursacht durch Unsymmetrien im Ständer- oder Läuferkreis, besitzen hingegen Frequenzen, welche ausschließlich von den Eigenschaften des speisenden Netzes und der elektrischen Maschine bestimmt sind und mit der Drehzahl in keinerlei Zusammenhang stehen.

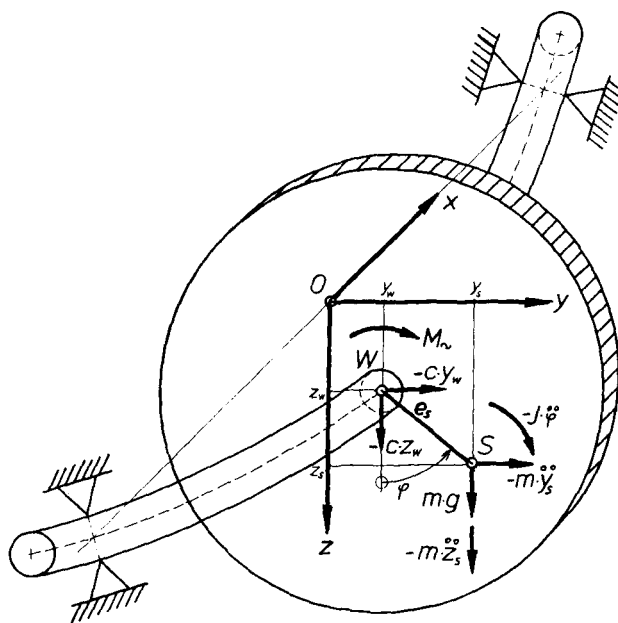


Bild 10:

Raumfestes kartesisches Koordinatensystem für eine Laval'sche Welle mit den angreifenden Kräften und Drehmomenten

Ausgehend von den in Bild 10 angegebenen Zählrichtungsvereinbarungen ergeben sich im ungedämpften Fall die nachstehenden Bewegungsdifferentialgleichungen

$$m \cdot \ddot{y}_s = -c \cdot y_w, \quad (16)$$

$$m \cdot \ddot{z}_s = -c \cdot z_w + m \cdot g, \quad (17)$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} = c \cdot y_w \cdot e_s \cdot \cos \varphi - c \cdot z_w \cdot e_s \cdot \sin \varphi + M_w. \quad (18)$$

Hierin ist  $c$  die wirksame Federzahl,  $e_s$  die Schwerpunktsverlagerung gegenüber dem Wellenmittelpunkt  $W$  und  $J$  das resultierende Massenträgheitsmoment. Zwischen den Koordinaten des Schwerpunktes  $S$  und des Wellenmittelpunktes bestehen die Beziehungen

$$y_s = y_w + e_s \cdot \sin \varphi, \quad (19)$$

$$z_s = z_w + e_s \cdot \cos \varphi. \quad (20)$$

In Schwerpunktskoordinaten gehen die drei Bewegungsdifferentialgleichungen über in

$$m \cdot \ddot{y}_s + c \cdot y_s - c \cdot e_s \cdot \sin \varphi = 0, \quad (21)$$

$$m \cdot \ddot{z}_s + c \cdot z_s - c \cdot e_s \cdot \cos \varphi - m \cdot g = 0, \quad (22)$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} - \hat{M}_w \cdot \sin(\omega_w \cdot t + \varphi_w) - c \cdot y_s \cdot e_s \cdot \cos \varphi + c \cdot z_s \cdot e_s \cdot \sin \varphi = 0. \quad (23)$$

Es handelt sich hier um ein nichtlineares, gekoppeltes Differentialgleichungssystem von zweiter Ordnung, für das nur eine numerische Lösung möglich ist. Nur für den Sonderfall, daß die Schwerpunktsexzentrizität  $e_s$  verschwindet (ideale statische Auswuchtung; die dynamische Auswuchtung ist in diesem Falle nicht von Interesse, da man normalerweise Kreiselwirkungen ausschließen kann), ist das System entkoppelt und damit trivial lösbar [7]. Leider kann man in der Praxis Restunwuchten nicht vermeiden, deshalb muß zur Lösung von dem gekoppelten Differentialgleichungssystem ausgegangen werden. Damit stellt sich die Alternative einer unanschaulichen numerischen Integration oder einer schrittweisen Näherungslösung. Im Hinblick auf die physikalische Durchsichtigkeit soll hier der letztere Weg beschrritten werden.

Es empfiehlt sich, die beiden Gln. 21) und 22) durch eine komplexe Schreibweise

$$\mathbf{r}_s = z_s + jy_s \quad (24)$$

zusammenzufassen. Man erhält dann

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}_s + c \cdot \dot{\mathbf{r}}_s = m \cdot \mathbf{g} + c \cdot \mathbf{e}_s \cdot e^{j\varphi}. \quad (25)$$

Das äußere Drehmoment  $M_w$  möge eine Abweichung  $\psi$  vom stationären Drehzustand  $\varphi_0 = \omega_m \cdot t + \varphi_m$

$$\varphi = \omega_m \cdot t + \varphi_m + \psi; \quad \dot{\varphi} = \omega_m + \dot{\psi}; \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\psi} \quad (26)$$

hervorrufen.

Wegen der großen Drehmassen ist der Winkel  $\psi$  klein gegenüber 1, so daß näherungsweise mit  $\cos \psi \approx 1$ ,  $\sin \psi \approx \psi$  gilt

$$e^{j\varphi} \approx e^{j(\omega_m \cdot t + \varphi_m)} \cdot (1 + j\psi). \quad (27)$$

Mit Hilfe der goniometrischen Umformungen

$$\begin{aligned} \cos \varphi &\approx \cos(\omega_m \cdot t + \varphi_m) - \psi \cdot \sin(\omega_m \cdot t + \varphi_m), \\ \sin \varphi &\approx \sin(\omega_m \cdot t + \varphi_m) + \psi \cos(\omega_m \cdot t + \varphi_m) \end{aligned}$$

läßt sich die Drehmomentgleichung 23) in die Form bringen

$$\begin{aligned} J \cdot \ddot{\psi} - \hat{M}_w \cdot \sin(\omega_w \cdot t + \varphi_w) + c \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\omega_m \cdot t + \varphi_m) \cdot \mathbf{e}_s \cdot \psi + \\ + c \cdot z_s \cdot \cos(\omega_m \cdot t + \varphi_m) \cdot \mathbf{e}_s \cdot \psi = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Für kleine Winkel  $\psi$  und eine kleine Schwerpunktsexzentrizität  $e_s$  sind die dem Produkt  $\psi \cdot \mathbf{e}_s$  proportionalen „Federmomente“ von zweiter Ordnung klein, und es gilt näherungsweise

$$\psi \approx - \frac{\hat{M}_w}{J \cdot \omega_w^2} \sin(\omega_w \cdot t + \varphi_w). \quad (29)$$

Geht man unter Berücksichtigung von Gl. 27) in die komplexe Bewegungsgleichung 25), so gilt

$$m \cdot \overset{\infty}{r}_s + c \cdot r_s = m \cdot g + c \cdot e_s \cdot e^{j(\omega_m \cdot t + \varphi_m)} - \frac{c \cdot e_s \cdot \hat{M}_w}{2 \cdot J \cdot \omega_w^2} \cdot e^{j[(\omega_m + \omega_w) \cdot t + (\varphi_m + \varphi_w)]} + 30) \\ + \frac{c \cdot e_s \cdot \hat{M}_w}{2 \cdot J \cdot \omega_w^2} \cdot e^{j[(\omega_m - \omega_w) \cdot t + (\varphi_m - \varphi_w)]}$$

Im stationären Drehzustand muß man also drei verschiedene Erregerkreisfrequenzen ( $\omega_m$ ,  $\omega_m + \omega_w$ ,  $\omega_m - \omega_w$ ) beachten.

Die partikuläre Lösung von Gl. 30) lautet demnach

$$r_s = \frac{m \cdot g}{c} + \frac{e_s \cdot e^{j(\omega_m \cdot t + \varphi_m)}}{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega_{ee}}\right)^2} - \frac{e_s \cdot M_w}{2 \cdot J \cdot \omega_w^2} \cdot \frac{e^{j[(\omega_m + \omega_w) \cdot t + (\varphi_m + \varphi_w)]}}{1 - \left(\frac{\omega_m + \omega_w}{\omega_{ee}}\right)^2} + 31) \\ + \frac{e_s \cdot \hat{M}_w}{2 \cdot J \cdot \omega_w^2} \cdot \frac{e^{j[(\omega_m - \omega_w) \cdot t + (\varphi_m - \varphi_w)]}}{1 - \left(\frac{\omega_m - \omega_w}{\omega_{ee}}\right)^2}$$

Es treten also neben der bekannten biegekritischen Drehzahl nach Gl. 2) zwei weitere Drehzahlen auf, bei denen die tiefste Biegeeigenkreisfrequenz  $\omega_{ee}$  angeregt wird.

Bisher wurde nicht beachtet, daß die Drehmomente  $M_w$  elektromagnetischen Ursprungs (Pendelmomente) keinesfalls in einem Trivialverhältnis zur Betriebsdrehzahl stehen. In [9] wird gezeigt, welche zusätzlichen Anregungsdrehzahlen bei Berücksichtigung der elektromagnetischen Pendelmomente vermieden werden müssen. Je nach der Ursache der Pendelmomente (Wicklungsunsymmetrien in Ständer bzw. Läufer; Windungs-, Phasen- und Erdschlüsse; Stab- und Ringbrüche; Stromrichter-überschwingungen usw.) lassen sich damit eine Vielzahl von Anregungsdrehzahlen erklären.

## 7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die elektromagnetischen Einflüsse auf die Laufgüte von Antrieben mit Drehstrommotoren aufgezeigt. Insbesondere werden die Wirkungen von Exzentrizitäten und Pendelmomenten elektrischen Ursprungs behandelt. Als neue Erkenntnisse ergeben sich

- exzentrische Läuferverlagerungen wirken bei Induktionsmotoren mit Käfigläufern auf das mechanische Schwingungsverhalten nicht nur über eine elektromagnetische Federzahl  $c_e$ , sondern zusätzlich über eine elektromagnetische Dämpfung  $d_e$  ein. Die Dämpfung  $d_e$  kann negativ sein und dann Schwingungsanfachungen verursachen, d. h. der Läufer kann eigenfrequente Biegeschwingungen bei Drehzahlen fernab der bekannten biegekritischen Drehzahlen ausführen.
- elektrisch verursachte Pendelmomente führen in Verbindung mit Schwerpunksexzentrizitäten zu weiteren biegekritischen Drehzahlen.



**Literaturhinweise**

- [1] KRÄMER, E.: „Kritische Drehzahlen von anisotrop gelagerten Wellen“ – BBC-Nachrichten, 1956, Heft 3, S. 93–107.
- [2] JOB, W.: „Stabilität von anisotrop gelagerten Wellen und die Rückwirkung der Luftspaltfelder in Drehstrommaschinen“ – Diss. TU Hannover 1974.
- [3] FREISE, W.: „Über die kritischen Drehzahlen elektrischer Maschinen“ – Diss. TU Hannover 1961.
- [4] PESTEL, E.: „Beitrag zur Ermittlung der hydrodynamischen Dämpfungs- und Feder-eigenschaften von Gleitlagern“ – Ing.-Archiv, Band 22, Heft 3, 1954, S. 147–155.
- [5] TONDL, A.: „Some Problems of Rotor Dynamics“ – Publishing House of the Czechoslovak Academy of Science, Prag 1965.
- [6] BROSCHE, P., FRÜCHTENICHT, J., JORDAN, H.: „Laufruhestörungen bei Elektrischen Maschinen“ – Konstruktion 26, 1974, S. 107–111.
- [7] BIEZENO, C.B., GRAMMEL, R.: „Technische Dynamik“ – Springer Verlag Berlin, 1939.
- [8] GASCH, R., PFÜTZNER, H.: „Rotordynamik“ – Springer Verlag, Berlin, 1975.
- [9] FRÜCHTENICHT, J.: „Elektromagnetische Pendelmomente und Schwerpunktexzentrizität als gemeinsame Ursache parametrisch angeregter Biegeeigenschwingungen von Läuferwellen“ – Erscheint demnächst im ETZ-Archiv.
- [10] KELLENBERGER, W.: „Die Stabilität rotierender Wellen infolge innerer und äußerer Dämpfung“ – Ing.-Archiv, Band 32, 1963, S. 323–340.
- [11] KROND, M.: „Selbsterregte Rüttelschwingungen von Induktionsmotoren mit parallelen Wicklungszeigen“ – Bull. S.E.V., Band 47, 1956, S. 581–588.
- [12] GEYSEN, W., JORDAN, H., LOHAUS, W., VON SOOS, K., VANDENPUT, A., WALCARIUS, H.: „Disturbances in the behavior of alternating-current machines by self-excited electromagnetic phenomena“ – Electric Power Applications, 1979, Vol. 2, No. 3, S. 81 bis 86.
- [13] JORDAN, H., MÜLLER, J., SEINSCH, H.O.: „Über elektromagnetische und mechanische Ausgleichsvorgänge bei Drehstromantrieben“ – Wiss. Ber. AEG-Telefunken, Band 52, 1979, S. 263–270.
- [14] JORDAN, H., MÜLLER, J., SEINSCH, H.O.: „Über das Verhalten von Drehstromasynchronmotoren in drehelastischen Antrieben“ – Erscheint demnächst in den Wiss. Ber. AEG-Telefunken.
- [15] FROHNE, H.: „Die Systemeigenfrequenzen elektrischer Maschinen in Vertikalauflistung“ – Conti-Elektro-Berichte, Bd. 11 (1965), S. 193–201.
- [16] KIMBALL, A.L.: „Measurement of Internal Friction in a Revolving Deflected Shaft“ – General Electric Review, 1925, S. 554–558.
- [17] FÖPPL, O., SCHAAF, G.: „Die Werkstoffdämpfung bei Dreh- und Biegeschwingsbeanspruchung“ – VDI-Verlag, 1930 (Heft 335), S. 1–27.

Die Verfasser danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung der Untersuchungen über Laufruhestörungen.