

# Über kinematische Geradenabbildungen

Lübbert, Christoph

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 30, 1979,  
S.35-49



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

## Über kinematische Geradenabbildungen\*)

Von **Christoph Lübbert**, Darmstadt

Vorgelegt von Hans Robert Müller

### 1. Einleitung

Seit BLASCHKE [2] und GRÜNWARD [12] (1911) ist bekannt, daß man die dreigliedrige Gruppe  $G_E$  der direkten Bewegungen der euklidischen Ebene  $E$  in einen dreidimensionalen reellen projektiven Raum  $P^3$  einbetten kann, derart, daß  $G_E$  den  $P^3$  bis auf eine Gerade  $g_\infty$  ausfüllt, wobei die Geraden durch den Einspunkt eingliedrige Untergruppen von  $G_E$  sind. Eine Gerade  $g$  in  $G_E = P^3 - g_\infty$  besteht dabei aus denjenigen Bewegungen, die einen bestimmten Punkt  $X_L \in E$  in einen Punkt  $X_R \in E$  überführen. Man erhält so eine „kinematische Geradenabbildung“

$$g \subset G_E \mapsto (X_L, X_R) \in E \times E,$$

welche jeder  $g_\infty$  nicht treffenden Geraden von  $P^3$  umkehrbareindeutig ein Punktepaar der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene zuordnet. Hierdurch wird die Geometrie der Raumkurven und Regelflächen des „quasielliptischen Raumes“ ( $P^3, G_E$ ) (BLASCHKE [3], BLASCHKE/MÜLLER [6]) auf die Kinematik der euklidischen Ebene  $E$  übertragen.

Ersetzt man  $g_\infty$  durch eine null- bzw. einteilige Quadrik  $S$  des  $P^3$ , so sind analoge kinematische Geradenabbildungen in die elliptische Ebene (oder die euklidische Sphäre) bzw. die hyperbolische Ebene von HJELMSLEV [13], STUDY [27], FUBINI [11], STRUBECKER [24], BLASCHKE [4], H. R. MÜLLER [20], ECKHART [9], REHBOCK [21] u. a. her bekannt. Die Bewegungsgruppe der elliptischen bzw. hyperbolischen Ebene füllt dabei den  $P^3$  bis auf die Quadrik  $S$  aus.

Das Prinzip der kinematischen Geradenabbildungen ist (wengstens lokal) verallgemeinerungsfähig auf jede Lie'sche Gruppe  $G$  (mit genügend kleinem Zentrum). Für unsere Belange genügt es, dieses Prinzip an einer  $r$ -gliedrigen Matrixliegruppe  $G \subset GL(n, \mathbb{R})$  klar zu machen: Ist  $\mathfrak{g}$  der Vektorraum der Liealgebra von  $G$  (die Elemente von  $\mathfrak{g}$  seien als  $n$ -reihige Matrizen dargestellt), so hat eine eingliedrige Untergruppe von  $G$  die Punktmenge

$$\mathfrak{g} = \{u(t) / t \in \mathbb{R}\} \quad (1.1)$$

mit einer natürlichen Parameterdarstellung

$$u: t \in \mathbb{R} \longrightarrow u(t) = \exp(\mathbf{t}\mathbf{x}) = e + \mathbf{t}\mathbf{x} + \frac{1}{2!}\mathbf{x}^2 + \dots \quad (1.2)$$

wobei  $e$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix und  $\mathbf{x} \neq 0$  ein festes Element aus  $\mathfrak{g}$  ist. In (1.1) ist der Parameter  $t$  nur bis auf lineare Transformationen  $t \longrightarrow c_1 t + c_2$  ( $c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$ )

\*) Die Note enthält überarbeitete Teile meiner Habilitationsschrift [17].

bestimmt. Als Menge  $\Gamma$  der „G-Geraden“ bezeichnen wir alle Untergruppen  $g$  der Form (1.1) und deren Translate  $ag, gb$  ( $a, b \in G$ ). Eine G-Gerade  $k$  durch Punkt  $a \in G$  kann als Rechts- oder Linkstranslat,  $k = g_L a = ag_R$ , von eingliedrigen Untergruppen  $g_L, g_R$  dargestellt werden. Sind

$$u_L(t) = \exp(t\mathbf{x}_L), \quad u_R(t) = \exp(t\mathbf{x}_R) \quad (1.3)$$

Parameterdarstellungen von  $g_L$  bzw.  $g_R$ ,

$$X_L = (\mathbf{x}_L) := \{\lambda\mathbf{x}_L/\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}, \quad X_R = (\mathbf{x}_R) := \{\lambda\mathbf{x}_R/\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\} \quad (1.4)$$

ihre Bildpunkte in dem zum Vektorraum  $\mathfrak{g}$  gehörigen projektiven Raum  $P(\mathfrak{g})$ , so erhält man eine „G-Geradenabbildung“

$$\gamma: \Gamma \longrightarrow P(\mathfrak{g}) \times P(\mathfrak{g}); \quad k \longmapsto (X_L, X_R), \quad (1.5)$$

die jeder G-Geraden  $k$  ein vom Anfangspunkt  $a \in k$  unabhängiges Punktepaar  $X_L, X_R$  in  $P(\mathfrak{g})$  zuordnet. Die  $r$ -gliedrige Gruppe  $G$  wirkt als eine „Bewegungsgruppe“ linearer Transformationen auf  $\mathfrak{g}$  bzw.  $P(\mathfrak{g})$  in der „adjungierten“ (i. allg. nicht treuen) Darstellung  $\text{ad}G$ :

$$\text{ad } a: \mathbf{x} \longmapsto a^{-1}\mathbf{x} \quad (a \in G). \quad (1.6)$$

Insbesondere läßt sich eine G-Gerade  $k \in \Gamma$  mit  $\gamma(k) = (X_L, X_R)$  deuten als Ort von Bewegungen, die den linken Bildpunkt von  $k$  in ihren rechten überführen:

$$\mathbf{x}_R = \text{ad } a(\mathbf{x}_L) = a^{-1}\mathbf{x}_L \quad (a \in k) \quad (1.7)$$

Im Beispiel von BLASCHKE und GRÜNWARDL entspricht  $P(\mathfrak{g})$  der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene  $E$  und  $\text{ad}G$  der euklidischen Bewegungsgruppe  $G_E$ . Die Gruppe  $G$  selbst wird man i. allg. nicht in einen  $r$ -dimensionalen projektiven Raum einbetten können; ihr entspricht im Beispiel von BLASCHKE/GRÜNWARDL der quasielliptische Raum. Trotzdem kann man die Analogie zur ebenen Kinematik weiterverfolgen: Eine differenzierbare Kurve  $A: t \in I \longrightarrow a(t) \in G$  ( $I$  ein reelles Intervall) induziert in  $P(\mathfrak{g})$  einen „Zwangslauf“

$$\text{ad } a(t): P(\mathfrak{g}) \longrightarrow \hat{P}(\mathfrak{g}) \quad (t \in I) \quad (1.8)$$

eines „Gangraumes“  $P(\mathfrak{g})$  gegenüber einem „Rastraum“  $\hat{P}(\mathfrak{g})$ . Analog zur ebenen euklidischen Kinematik nennen wir ein durch  $\text{ad } a(t_0)$  aufeinanderbezogenes Punktepaar  $X = (\mathbf{x}) \in P(\mathfrak{g}), \hat{X} = (\hat{\mathbf{x}}) \in \hat{P}(\mathfrak{g})$ ,

$$\hat{\mathbf{x}} = a^{-1}(t_0) \mathbf{x} a(t_0), \quad (1.9)$$

ein *Gangpol-Rastpolpaar* a. d. Stelle  $t_0$ , wenn die „Führungsgeschwindigkeit“

$$\left(\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt}\right)_t(t) := (a^{-1})' \mathbf{x} a(t) + a^{-1}(t) \mathbf{x} \dot{a}(t) \quad (1.10)$$

von  $X$  a. d. Stelle  $t_0$  verschwindet. ( $\dot{a}(t)$  bezeichne die Ableitung der Matrixfunktion  $a(t)$ ). Ist  $X(t), \hat{X}(t)$  ein differenzierbar von  $t \in I$  abhängiges Gangpolrastpolpaar, so durchlaufen Gang- und Rastpol i. allg. je eine Kurve im Gang- und Rastraum, die man als *Gang-* und *Rastpolkurve* bezeichnet; (i. allg. gibt es mehrere solcher Pol-

kurven). Ein solches Polkurvenpaar ist durch  $\text{ad } a(t)$  nicht nur punktweise (vgl. (1.9)), sondern auch tangentialweise aufeinander bezogen, da aus  $(d\mathbf{x}/dt)_t = 0$  folgt

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \text{ad } a(t) \mathbf{x}'(t). \quad (1.11)$$

Die G-Gradenabbildung (1.5) liefert nun folgendes für die Kinematik in  $P(\mathfrak{g})$  fundamentales Lemma:

**Lemma 1:** *Berührt die G-Gerade  $k_{t_0}$  die Kurve  $a(t)$  in  $G$  an der Stelle  $t_0$ , so liefert das „Tangentenbild“  $\gamma(k_{t_0}) = (X_L(t_0), X_R(t_0))$  ein Gangpol-Rastpolpaar des Zwanglaufs  $\text{ad } a(t): P(\mathfrak{g}) \rightarrow \hat{P}(\mathfrak{g})$  an der Stelle  $t_0$ . Jedes weitere Gangpol-Rastpolpaar  $X = (\mathbf{x}) \in P(\mathfrak{g})$ ,  $\hat{X} = (\hat{\mathbf{x}}) \in \hat{P}(\mathfrak{g})$  an der Stelle  $t_0$  ist durch das Verschwinden der Lieprodukte*

$$[\mathbf{x}_L, \mathbf{x}] = \mathbf{x}_L \mathbf{x} - \mathbf{x} \mathbf{x}_L = 0, \quad [\mathbf{x}_R, \hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{x}_R \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}_R = 0 \quad (1.12)$$

gegeben.<sup>1)</sup>

**Beweis:** Soll die G-Gerade  $k_{t_0}: \mathbf{x}(s) = \exp(s\mathbf{x}_L) a(t_0) \exp(s\mathbf{x}_R)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) die Kurve  $a(t)$  an der Stelle  $t_0$  berühren,  $\mathbf{x}'(0) = \dot{a}(t_0)$ , so folgt für ihre  $\gamma$ -Bilder

$$\mathbf{x}_L = \dot{a}(t_0) a^{-1}(t_0), \quad \mathbf{x}_R = a^{-1}(t_0) \dot{a}(t_0). \quad (1.13)$$

Ableiten von  $\mathbf{x}_R$  ergibt wegen  $(a^{-1})' = -a^{-1} \dot{a} a^{-1}$ , daß  $(d\mathbf{x}_R/dt)_t(t_0) = 0$  gilt, d. h.  $X_L = (\mathbf{x}_L), X_R = (\mathbf{x}_R)$  ist Gangpol-Rastpolpaar. Die Gleichungen (1.12) sind dann lediglich Umformungen der Polbildung  $(d\hat{\mathbf{x}}/dt)_t(t_0) = 0$  für ein allgemeines Gangpol-Rastpolpaar  $X, \hat{X}$  mit Hilfe von (1.13).

In dieser Note interessieren besonders solche Fälle, wo das Tangentenbild  $\gamma(k_i)$  einer Kurve  $a$  in  $G$  das einzige Gangpol-Rastpolpaar des Zwanglaufs (1.8) liefert.

## 2. Kinematische Räume und Geradenabbildungen

Es ist zu erwarten, daß die kinematische Geradenabbildung geometrisch besonders durchsichtig wird, wenn eine Liegruppe  $G$  vorliegt, die einen projektiven Raum teilweise ausfüllt, wobei die G-Geraden auf projektiven Geraden liegen. Dies führt auf das Konzept des kinematischen Raumes nach L. BRÖCKER [8], dem wir uns – unter Beschränkung auf  $\mathbb{R}$  als Grundkörper – im wesentlichen anschließen.

$P$  sei ein  $n$ -dimensionaler reeller projektiver Raum ( $n \geq 3$ ) und  $G$  eine (Lie'sche) Gruppe, die  $P$  bis auf eine Menge  $S = P - G$  von „singulären Punkten“ ausfüllt; die Punkte von  $G$  nennen wir *regulär*. Das Paar  $(P, G)$  heiße ein *kinematischer Raum*, wenn gilt:

(KR1) *Die Multiplikation in  $G$  kann auf Produkte  $AX, XA$  ( $A \in G, X \in P$ ) erweitert werden, derart, daß die Abbildungen  $X_t \rightarrow AX, X_t \rightarrow XA$  Kollineationen von  $P$  sind.*

(KR2) *Ist  $g$  eine beliebige Gerade von  $P$  durch den Einspunkt  $I$  von  $G$ , so ist  $g \cap G$  Untergruppe von  $G$ .*

(KR3) *Jede Gerade  $g \notin S$  trifft  $S$  in höchstens endlich vielen Punkten.*

Im Beispiel von BLASCHKE/GRÜNWARD besteht  $S$  aus den Punkten der Gerade

<sup>1)</sup> Lemma 1 verallgemeinert den entsprechenden Satz 29 in MÜLLER [20], S. 81.

Wegen (KR2) bezeichnen wir die Kollineationen in (KR1) als *linke* und *rechte Schiebungen*.

**Lemma 2:** *Das Invertieren in  $\mathbf{G}$  erzeugt eine involutorische Kollineation  $j = \text{id}_{\mathbf{P}}$  von  $\mathbf{P}$ , die neben  $I$  noch genau eine nicht durch  $I$  gehende Hyperebene  $\mathbf{H}$  punktweise fest läßt.*

**Beweis:**  $A \mapsto A^{-1} (A \in \mathbf{G})$  ist wegen (KR1), (KR2) eine involutorische Kollineation in  $\mathbf{G}$ , die sich wegen (KR3) zu einer involutorischen Kollineation von  $\mathbf{P}$  fortsetzen läßt.  $j \neq \text{id}_{\mathbf{P}}$ , da  $\mathbf{G}$  Liegruppe ist. Auf einer Geraden  $g$  durch  $I$  läßt  $j$  neben  $I$  noch genau einen weiteren Punkt fest, also läßt  $j$  noch genau eine Hyperebene  $\mathbf{H} \neq I$  punktweise fest.

Offensichtlich übernimmt  $\mathbf{H}$  die Rolle des projektiven  $(n-1)$ -dimensionalen Raumes  $P(\mathfrak{g})$  zur Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $\mathbf{G}$ , da mit Lemma 2 die Gruppe  $\mathbf{G}$  in der adjungierten Darstellung  $\text{ad}\mathbf{G}$ ,

$$\text{ad}A (X) := A^{-1} X A \quad (A \in \mathbf{G}) \quad (2.1)$$

die Hyperebene  $\mathbf{H}$  in sich überführt.  $\text{ad}\mathbf{G}$  bezeichnen wir als „Bewegungsgruppe“ von  $\mathbf{H}$ . Die zugehörige kinematische Geradenabbildung definieren wir für alle Geraden  $g \notin \mathbf{S}$  von  $\mathbf{P}$  durch

$$\begin{aligned} \gamma: g &\mapsto (X_L, X_R) \in \mathbf{H} \times \mathbf{H} \text{ mit} \\ X_L &:= gA^{-1} \cap \mathbf{H}, X_R := A^{-1}g \cap \mathbf{H} \quad (A \in g \cap \mathbf{G}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\gamma$  ist von der Wahl des regulären Punktes  $A \in g$  unabhängig, da wegen (KR2)  $gA^{-1} \cap \mathbf{G}$ ,  $A^{-1}g \cap \mathbf{G}$  Untergruppen sind.

### 3. Algebraisierung

Unter einer Algebra verstehen wir hier einen  $(n+1)$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbf{A}$  mit einem  $\mathbb{R}$ -bilinearen assoziativen Produkt  $a, b \in \mathbf{A} \rightarrow ab \in \mathbf{A}$ .  $\mathbf{A}$  besitze eine Eins  $e$ , die man mit  $1 \in \mathbb{R}$  identifizieren kann.  $\mathbf{E}$  sei die Gruppe der Einheiten (also der invertierbaren Elemente) von  $\mathbf{A}$ . BRÖCKER [8] hat gezeigt, daß es zu jedem kinematischen Raum  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  (auch über beliebigem Grundkörper  $K$ ) bis auf Isoerphie genau eine  $K$ -Algebra  $\mathbf{A}$  gibt mit

$$\mathbf{P} = P(\mathbf{A}), \quad \mathbf{G} = P(\mathbf{E})^2 \quad (3.1)$$

Bei LÜBBERT [17] wurde gezeigt, daß (für  $K = \mathbb{R}$ ) die zu  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  gehörige Algebra  $\mathbf{A}$  eine kinematische Algebra im Sinne von KARZEL [15] ist. Eine Algebra  $\mathbf{A}$  heiße *kinematisch*<sup>3)</sup>, wenn  $\mathbf{A}$  einen involutorischen Antiautomorphismus

$$\varphi \neq \text{id} : x \mapsto \bar{x} \quad (\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}, x = \bar{\bar{x}}) \text{ gestattet mit } x = \bar{\bar{x}} \text{ genau für } x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

<sup>2)</sup> Ist  $T$  Teilmenge des Vektorraumes  $\mathbf{A}$ , so bezeichne  $P(T)$  die Punktmenge  $\{(x) \in \mathbf{P} / x \in T - \{0\}\}$  in dem zu  $\mathbf{A}$  gehörigen Projektiven Raum  $\mathbf{P} = P(\mathbf{A})$ .

<sup>3)</sup> KARZEL [15] hat eine andere (mit (3.2) gleichwertige) Definition angegeben.

Der Antiautomorphismus  $\varphi$  bestimmt auf  $\mathbf{A}$  eine symmetrische Bilinearform („Metrik“)

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2} (x\bar{y} + y\bar{x}) \in \mathbb{R} \quad (x, y \in \mathbf{A}), \quad (3.3)$$

die zur Klassifizierung der kinematischen Räume und entsprechenden Geradenabbildungen dienen wird. Dazu gehört die „Norm“

$$N(x) := \langle x, x \rangle = x\bar{x} \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbf{A}) \quad (3.4)$$

mit den Eigenschaften

$$N(1) = 1, \quad N(xy) = N(x)N(y), \quad N(\bar{x}) = N(x). \quad (3.5)$$

Die Gruppe  $\mathbf{E}$  der Einheiten von  $\mathbf{A}$  ist durch

$$x \in \mathbf{E} \Leftrightarrow N(x) \neq 0 \quad \text{mit} \quad x^{-1} = N(x)^{-1}\bar{x} \quad (3.6)$$

gekennzeichnet. Die Menge der Nullteiler bildet wegen (3.6) einen quadratischen Kegel in  $\mathbf{A}$  mit der Gleichung  $N(x) = 0$ . Nennen wir zwei Vektoren  $x, y \in \mathbf{A}$  orthogonal ( $x \perp y$ ), wenn  $\langle x, y \rangle = 0$  gilt, so gestattet  $\mathbf{A}$  die orthogonale Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbf{V} \quad \text{mit} \quad \mathbf{V} := \{x \in \mathbf{A} / \langle 1, x \rangle = 0\} \quad (3.7)$$

Jedes  $x \in \mathbf{A}$  läßt sich dann eindeutig in der Form

$$x = \xi + \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \xi - \mathbf{x} \quad (\xi \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{V}) \quad (3.8)$$

schreiben. Mit (3.8) erhält man die nützlichen Kriterien

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{x} = x, \quad x \in \mathbf{V} \Leftrightarrow \bar{x} = -x \quad (3.9)$$

Ist  $\mathbf{A}$  kinematische Algebra des kinematischen Raumes  $\mathbf{P} = P(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{G} = P(\mathbf{E})$ , so sind  $X = (x) = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$  ( $x \in \mathbf{A} - \{0\}$ ) die Punkte in  $\mathbf{P}$ ,  $I = (1)$  der Einspunkt, und das Produkt ist über  $XY := (xy)$  (für  $xy \neq 0$ ) definiert. (KR1) ist wegen der Bilinearität des Produktes in  $\mathbf{A}$  erfüllt. (KR3) gilt, weil die Menge der singulären Punkte,

$$\mathbf{S} = \{X = (x) / x \neq 0, N(x) = 0\} \quad (3.10)$$

eine (eventuell nullteilige oder ausgeartete) *Hyperquadrik* des projektiven Raumes darstellt. Die Gültigkeit von (KR2) ergibt sich so: Für  $x \in \mathbf{V}$  gilt nach (3.4), (3.9)

$$N(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^2. \quad (3.11)$$

Daher schreibt sich das Quadrat jedes Vektors  $x = \xi + \mathbf{x}$  in der Form

$$x^2 = -(\xi^2 + N(\mathbf{x})) + 2\xi\mathbf{x} \in \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Der Teilraum  $T_x := \mathbb{R} + \mathbb{R}x$  ist also Teilalgebra von  $\mathbf{A}^4$  und daher  $P(T_x)$  (für  $x \neq 0$ ) eine Gerade durch  $I$ , deren Durchschnitt mit  $\mathbf{G}$  eine Untergruppe von  $\mathbf{G}$  ist. Wegen (3.7), (3.9) entspricht  $\varphi$  der Involution  $j$ ,  $P(\mathbf{V})$  der Hyperebene  $\mathbf{H}$  aus Lemma 2.

<sup>4)</sup> Durch diese Eigenschaft hat KARZEL [15] die kinematischen Algebren definiert, wobei statt  $\mathbb{R}$  ein beliebiger Grundkörper  $K$  steht.

Schließlich kann  $\mathbf{V}$  mit dem Vektorraum  $\mathfrak{g}$  der Liealgebra von  $\mathbf{G}$  identifiziert werden, denn ist  $A(t)$  ( $t$  reeller Parameter) eine differenzierbare Kurve in  $\mathbf{G}$  durch den Einspunkt  $I = A(0)$ , so kann man in der Umgebung von  $I$  die Kurve  $A(t)$  durch eine genormte Vektorfunktion  $\mathbf{a}(t) \in \mathbf{E}$  ( $\mathbf{a}(0) = 1$ ,  $N(\mathbf{a}) = 1$ ) darstellen. Das Liewelement (Tangentenvektor an  $A$  bei  $t=0$ ),  $\mathbf{a} = (da/dt)(0) = \dot{\mathbf{a}}(0)$ , ist ein Vektor in  $\mathbf{V}$ , da aus  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$  folgt:  $\langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle = 0$ , also für  $t=0$ :  $\langle 1, \mathbf{a} \rangle = 0$ . (Das Lieprodukt in  $\mathbf{V}$ ,  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \mathbf{xy} - \mathbf{yx}$ , erfüllt, wie man leicht bestätigt, die Jacobi-Identität).

Somit kann man eine Gerade  $g \subset \mathbf{P}$  durch  $I$  in einer Umgebung von  $I$  durch die Vektorfunktion

$$g: \exp(\mathbf{tx}) = 1 + \mathbf{tx} + \frac{1}{2!} t^2 \mathbf{x}^2 + \frac{1}{3!} t^3 \mathbf{x}^3 + \dots \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.13)$$

in  $\mathbf{A}$  darstellen. Hierbei ist  $X = (\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \neq 0$ ) der Durchstoßpunkt von  $g$  durch die Hyperebene  $\mathbf{H}$ , also mit (2.2):

$$\gamma(g) = (X, X). \quad (3.14)$$

Für eine analytische Beschreibung der kinematischen Geradenabbildungen  $\gamma$  ist es nützlich, zu jedem  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  die reellen Funktionen  $t \rightarrow \text{Co}(\mathbf{tx})$ ,  $t \rightarrow \text{Si}(\mathbf{tx})$  über

$$\begin{aligned} \text{Co}(\mathbf{tx}) &:= \frac{1}{2} (\exp(\mathbf{tx}) + \exp(-\mathbf{tx})) \\ \mathbf{x} \text{ Si}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2} (\exp(\mathbf{tx}) - \exp(-\mathbf{tx})) \end{aligned} \quad (3.15)$$

einzuführen. Da man für die Parameterdarstellung (3.13) einer eingliedrigen Untergruppe von  $\mathbf{G}$  durch Parametertransformation  $t \rightarrow ct$  ( $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ) stets

$$N(\mathbf{x}) \in \{-1, 0, +1\} \quad (3.16)$$

erreichen kann, interessieren nur die „Normalformen“<sup>5)</sup>

$$\text{Co}(\mathbf{tx}) = \begin{cases} \text{cost} \\ 1 \\ \text{Cost} \end{cases}, \quad \text{Si}(\mathbf{tx}) = \begin{cases} \text{sint} \\ t \\ \text{Sint} \end{cases} \quad \text{für } N(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}, \quad (3.16)$$

wobei rechts jeweils die üblichen trigonometrischen bzw. Hyperbelfunktionen stehen.

Entsprechend besitzt nun eine allgemeine Gerade  $h \not\subset \mathbf{S}$  von  $\mathbf{P}$  in der Umgebung eines ihrer Punkte  $A_0 = (a_0) \in \mathbf{G}$  die simultanen Parameterdarstellungen

$$\text{mit } h: \mathbf{a}(t) = a_0 \exp(\mathbf{tx}_L) = \exp(\mathbf{tx}_R) a_0 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.17)$$

$$\gamma(h) = (X_L, X_R), \quad X_L = (\mathbf{x}_L), \quad X_R = (\mathbf{x}_R) \quad (3.18)$$

Den drei Normalformen (3.16) entspricht die Sprechweise: „ $h$  ist *elliptisch*, *parabolisch*, *hyperbolisch*“ je nachdem  $N(\mathbf{x}_L) = N(\mathbf{x}_R) = +1$ ,  $0$  oder  $-1$  ist, d. h. je nachdem  $h$  die Hyperquadrik  $\mathbf{S}$  in *keinem*, *einem* oder *zwei* Punkten trifft.

<sup>5)</sup> Für Dimension  $n = 3$  vgl. auch die trigonometrischen Funktionen „dualer“ Winkel bei der Quaternionendarstellung räumlicher euklidischer Bewegungen, BLASCHKE [5], S. 45.

Zur Ermittlung der Geradenbilder in  $\mathbf{H}$  dient

**Satz 1:** *Führt man in  $\mathbf{A}$  die bilinearen alternierenden Produkte*

$$a \hat{L} b = \frac{1}{2} (b \bar{a} - a \bar{b}), a \hat{R} b = -\frac{1}{2} (\bar{b} a - \bar{a} b) \quad (3.19)$$

*ein, so ergeben sich für eine Gerade  $h \notin \mathbf{S}$  von  $\mathbf{P}$  die Bildpunkte aus  $\gamma(h)$  zu*

$$X_L = (a \hat{L} b), X_R = (a \hat{R} b), \quad (3.20)$$

*wobei  $A = (a), B = (b)$  zwei beliebige verschiedene Punkte von  $h$  sind<sup>6)</sup>.*

**Beweis:**  $h$  sei in der Umgebung eines regulären Punktes  $(a_0) \in h$  gemäß (3.17) parametrisiert. Mit  $a = a(t_1), b = a(t_2)$  folgt aus (3.19), (3.15):

$$a \hat{L} b = N(a_0) \text{Si}((t_2 - t_1) \mathbf{x}_L) \mathbf{x}_L, a \hat{R} b = N(a_0) \text{Si}((t_2 - t_1) \mathbf{x}_R) \mathbf{x}_R.$$

#### 4. Klassifikation der Kinematischen Räume und Geradenabbildungen

Zur Klassifikation bedienen wir uns des Ausartungsgrades der Metrik  $\langle, \rangle$ , d. h. der Dimension des Radikals

$$\text{Rad } \mathbf{A} = \{x \in \mathbf{A} / \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in \mathbf{A}\} \subset \mathbf{V}. \quad (4.1)$$

Es sei  $\dim \mathbf{A} = n + 1, \dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{P} = n \geq 3$ . Wir unterscheiden drei Haupttypen:

- (I )  $\dim \text{Rad } \mathbf{A} \leq n-2$ : ( $\mathbf{P}, \mathbf{G}$ ) heiÙe *regulär*<sup>7)</sup>
- (II )  $\dim \text{Rad } \mathbf{A} = n-1$ : ( $\mathbf{P}, \mathbf{G}$ ) heiÙe *geschlitzt*<sup>7)</sup>
- (III)  $\dim \text{Rad } \mathbf{A} = n$  : ( $\mathbf{P}, \mathbf{G}$ ) heiÙe *ausgeartet*.

Zunächst einige Bezeichnungen und Lemmata: Durch die Hyperquadrik  $\mathbf{S}$  ist in  $\mathbf{P}$  eine (i. allg. ausgeartete) Polarität gegeben. Ist  $T$  Teilraum von  $\mathbf{P}$ , so besteht der zu  $T$  polare Raum  $T^\perp$  aus den Punkten  $(x)$  mit  $\langle x, y \rangle = 0$  für alle  $(y) \in T$ ; speziell ist  $\mathbf{P}^\perp = \text{Rad } \mathbf{P} = \mathbf{P}(\text{Rad } \mathbf{A})$  das „Radikal von  $\mathbf{P}$ “. Zu einem Punkt  $X \notin \text{Rad } \mathbf{P}$  gehört die *Polarhyperebene*

$$X^\perp = \mathbf{H}X = \mathbf{X}H, \quad (4.2)$$

wobei  $\mathbf{H}$  die Polarhyperebene des Einspunktes  $I$  ist. Ist  $g$  eine  $\text{Rad } \mathbf{P}$  nichttreffende Gerade durch die Punkte  $A \neq B$ , so ist ihre *Polare*

$$g^\perp = \mathbf{H}A \cap \mathbf{H}B = \mathbf{A}H \cap \mathbf{B}H \quad (4.3)$$

ein  $(n-2)$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbf{P}$ . Für eine Gerade  $g \notin \mathbf{S}$  mit  $\gamma(g) = (X_L, X_R)$  heiÙe die Menge

<sup>6)</sup> Sind speziell  $A, B \in h$  reguläre Punkte mit  $\langle a, b \rangle = 0$ , so folgt  $X_L = BA^{-1}, X_R = A^{-1}B$ . Auf diese Weise haben BLASCHKE und MÜLLER [5, 6, 20] die Geradenabbildung aus dem elliptischen bzw. quasielliptischen 3-dimensionalen Raum mit Hilfe einer geeigneten Quaternionenalgebra erklärt.

<sup>7)</sup> Den Typen (I)–(III) entsprechen bei BRÖCKER [8] im wesentlichen die „ordinären“, „singulären“ und „ausgearteten“ kinematischen Räume.  $\text{Rad } \mathbf{A}$  wurde dort jedoch nicht zur Einteilung verwendet.



$$Z(g) := \{A \in \mathbf{G} / AX_R = X_L A\} \quad (4.4)$$

der Zentralisator von  $g$ ;  $\text{ad}Z(g)$  besteht aus allen Bewegungen, die  $X_L$  nach  $X_R$  bringen.

**Lemma 3:** *Ist  $g \notin \mathbf{S}$  eine nichtparabolische Gerade von  $\mathbf{P}$ , so besteht ihr Zentralisator genau aus den regulären Punkten von  $g$  und ihrer Polaren*

$$Z(g) = (g \cup g^\perp) \cap \mathbf{G} \quad (4.5)$$

**Beweis:** Mit einem beliebigen  $B \in g \cap \mathbf{G}$  und  $g_L := gB^{-1}$  gilt  $Z(g)B^{-1} = Z(g_L)$ . Wegen (2.2) ist  $g_L \cap \mathbf{H} = X_L$  der linke Bildpunkt von  $g$ . Da  $g$  nicht parabolisch ist, folgt, daß  $X_L$  regulär ist. Setzen wir  $X_L = (\mathbf{x})$ , so ergeben sich die Punkte  $Y = (\mathbf{y})$  von  $Z(g_L)$  aus der Bedingung

$$\mathbf{x} \mathbf{y} = \mu \mathbf{y} \mathbf{x} \quad (\mu \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (4.6)$$

Aus  $0 \neq N(\mathbf{x}\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}\mathbf{x})$  folgt  $\mu = \pm 1$ . Eine leichte Rechnung, die (3.9) berücksichtigt, ergibt:  $\mu = +1 \Leftrightarrow Y \in g_L$ ,  $\mu = -1 \Leftrightarrow Y \in g_L^\perp$ . Daraus folgt (4.5).

Lemma 3 besagt insbesondere, daß  $\gamma(g) = \gamma(h)$  gilt genau für alle Geraden  $h \notin \mathbf{S}$  im Polarraum von  $g$ .

#### 4.1) Reguläre kinematische Räume und deren Geradenabbildungen

**Satz 2:** *Ein regulärer kinematischer Raum  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  ( $\dim \mathbf{P} = n \geq 3$ ) ist notwendig dreidimensional und ohne Radikal ( $\text{Rad} \mathbf{P} = \emptyset$ ).<sup>8)</sup>*

**Beweis:** Wir zeigen, daß die Polare  $h^\perp$  einer Gerade  $h \subset \mathbf{P}$  eindimensional ist: Wegen  $\dim \text{Rad} \mathbf{A} \leq n-2$  gibt es in  $\mathbf{V}$  zwei orthogonale Einheiten  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ . Aus  $-2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{ab} + \mathbf{ba} = 0$  folgt, daß auch  $\mathbf{c} := \mathbf{ab}$  eine zu  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  orthogonale Einheit in  $\mathbf{V}$  ist. Für die Punkte  $A = (\mathbf{a})$ ,  $B = (\mathbf{b})$ ,  $C = (\mathbf{c}) \in \mathbf{H}$  gilt

$$C = AB = BA. \quad (*)$$

Die Gerade  $h \subset \mathbf{H}$  durch die regulären Punkte  $A, B$  ist nicht parabolisch, ihre Polare  $h^\perp = \mathbf{HA} \cap \mathbf{HB}$  enthält die Gerade  $g$  durch  $I$  und  $C$ . Für einen beliebigen Punkt  $Y \in h^\perp - \mathbf{H}$  gilt daher  $YA = AY$ ,  $YB = BY$ , also  $YC = CY$  wegen (\*). Nach (4.4) und Lemma 3 ist also  $Y$  im Zentralisator  $Z(g) = (g \cup g^\perp) \cap \mathbf{G}$  enthalten; wegen  $Y \notin \mathbf{H}$ ,  $g^\perp \subset \mathbf{H}$  folgt  $Y \in g$  und damit:  $g = h^\perp$ ,  $n = 3$ ,  $\dim \text{Rad} \mathbf{A} \geq 1$ . Da nun  $\dim \mathbf{V} = 3$  ist,  $\mathbf{V}$  aber drei paarweise orthogonale Einheiten enthält, muß  $\dim \text{Rad} \mathbf{A} = 0$  sein.

**Folgerung 1:** *Die beiden einzigen regulären kinematischen Räume sind (a) der elliptische Raum  $\mathbf{E}I^3$  mit nullteiliger Quadrik  $\mathbf{S} = \emptyset$  und den Quaternionen als kinematischer Algebra,  $\text{ad} \mathbf{G}$  ist Bewegungsgruppe der elliptischen Ebene  $\mathbf{H}$  (bzw. der euklidischen Einheitskugel), (b) der indefinit-elliptische<sup>9)</sup> Raum  $\mathbf{H}I^3$  mit einschaligem*

<sup>8)</sup> Vgl. auch BRÖCKER [8], S. 260 f.

<sup>9)</sup> Die Bezeichnung stammt von STRUBECKER [26]. SCHRÖDER [23] nennt diesen kinematischen Raum hyperbolisch.

*Hyperboloid  $\mathbf{S}$  und kinematischer Algebra, die zum Ring  $L(2, \mathbb{R})$  aller zweireihigen Matrizen isomorph ist,  $\text{ad}\mathbf{G}$  ist Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene  $\mathbf{H}$  mit  $\mathbf{S} \cap \mathbf{H}$  als absolutem Kreis.*

**Beweis:** Nach dem Beweis von Satz 2 hat  $\mathbf{V}$  eine Basis  $e_1 = \mathbf{a}$ ,  $e_2 = \mathbf{b}$ ,  $e_3 = \mathbf{c} = e_1 e_2$  aus paarweise orthogonalen Einheiten, die wir o.B.d.A. als normiert annehmen können,  $N(e_1) = \alpha_1 = \pm 1$ ,  $N(e_2) = \alpha_2 = \pm 1$ ,  $N(e_3) = \alpha_1 \alpha_2$ .

Bei gegebenen  $\alpha_1, \alpha_2$  ist  $\mathbf{A}$  durch die Multiplikationstafel

$$\begin{aligned} 1e_i = e_i, 1 = e_i, e_i^2 = -\alpha_i, e_2^2 = -\alpha_2, e_3^2 = -\alpha_1 \alpha_2, e_1 e_2 = e_3, \\ e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (4.5)$$

bestimmt. Für  $x = \xi_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$  ergibt sich die Norm

$$N(x) = \xi_0^2 + \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 \xi_3^2. \quad (4.6)$$

(a) Für  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ist  $\mathbf{A}$  der Schiefkörper der (reellen) Quaternionen, und die Gleichung  $N(x) = 0$  ergibt eine nullteilige Quadrik  $\mathbf{S}$ .

(b) Für  $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$  ist  $\mathbf{A}$  zur Algebra  $L(2, \mathbb{R})$  isomorph<sup>10)</sup> und die Gleichung  $N(x) = 0$  bestimmt in  $\mathbf{P}$  ein einschaliges Hyperboloid  $\mathbf{S}$ . Die beiden noch möglichen Fälle  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$  oder  $\alpha_1 = -\alpha_2 = -1$  führen (bis auf Isomorphie) auf dasselbe Ergebnis.

Lemma 3 und Satz 2 ergeben für die kinematische Geradenabbildung:

**Folgerung 2:** Gilt  $(X_L, X_R) = \gamma(g)$  für zwei reguläre Punkte  $X_L, X_R \in \mathbf{H}$ , so hat  $(X_L, X_R)$  genau die zwei zueinander polaren Urbildgeraden  $g, g^\perp$ . Im Fall des  $\mathbf{E}l^3$  ist jedes Punktepaar von  $\mathbf{H}$  ein  $\gamma$ -Bild, im Fall des  $\mathbf{H}l^3$  genau dann, wenn beide Punkte entweder im Äußeren oder im Inneren des absoluten Kreises  $\mathbf{H} \cap \mathbf{S}$  oder auf  $\mathbf{H} \cap \mathbf{S}$  liegen. Gilt  $X_L, X_R \in \mathbf{H} \cap \mathbf{S}$ , so gibt es dazu unendlich viele parabolische Urbildgeraden.

**Anmerkung:** Orientiert man die Geraden von  $\mathbf{E}l^3$  oder  $\mathbf{H}l^3$  durch eine Parameterdarstellung (3.17), so kann man die Geradenabbildung für nichtparabolische Geraden umkehrbar machen, indem man jeder orientierten Geraden  $\vec{g}$  das normierte Vektorpaar  $(\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_R)$  zuordnet und die Orientierung  $\vec{g}^\perp$  auf der Polaren  $g^\perp$  so festlegt, daß sie das Bild  $(\mathbf{x}_L, -\mathbf{x}_R)$  erhält. Auf diese Weise haben BLASCHKE und MÜLLER [5], [20] im Fall des  $\mathbf{E}l^3$  die Geometrie der Raumkurven und Regelflächen des  $\mathbf{E}l^3$  mit der Kinematik der euklidischen Einheitssphäre in Verbindung gebracht<sup>11)</sup>.

Eine konstruktive Beschreibung der kinematischen Geradenabbildung aus dem  $\mathbf{H}l^3$  stammt von ECKHART [9] und REHBOCK [21] (Abb. 1): Eine Gerade  $g \subset \mathbf{P}^3$  treffe das Hyperboloid  $\mathbf{S}$  in zwei Punkten  $S_1, S_2$ . Die beiden Erzeugenden durch  $S_1$  und  $S_2$  aus der ersten Regelschar von  $\mathbf{S}$  treffen die Ebene  $\mathbf{H}$  in zwei Punkten, deren Verbindung mit  $h_1$  bezeichnet sei. Der linke Bildpunkt  $X_1$  von  $g$  ist dann der Pol von

<sup>10)</sup> Vgl. BACHMANN [1], S. 180 f.

<sup>11)</sup> Vgl. auch LÜBBERT [16, 18].

$h_I$  bez. des Kreises  $\mathbf{H} \cap \mathbf{S}$ . Entsprechend bekommt man den rechten Bildpunkt  $X_{II}$  mit Hilfe der durch  $S_1, S_2$  gehenden Erzeugenden aus der zweiten Regelschar von  $\mathbf{S}$ .

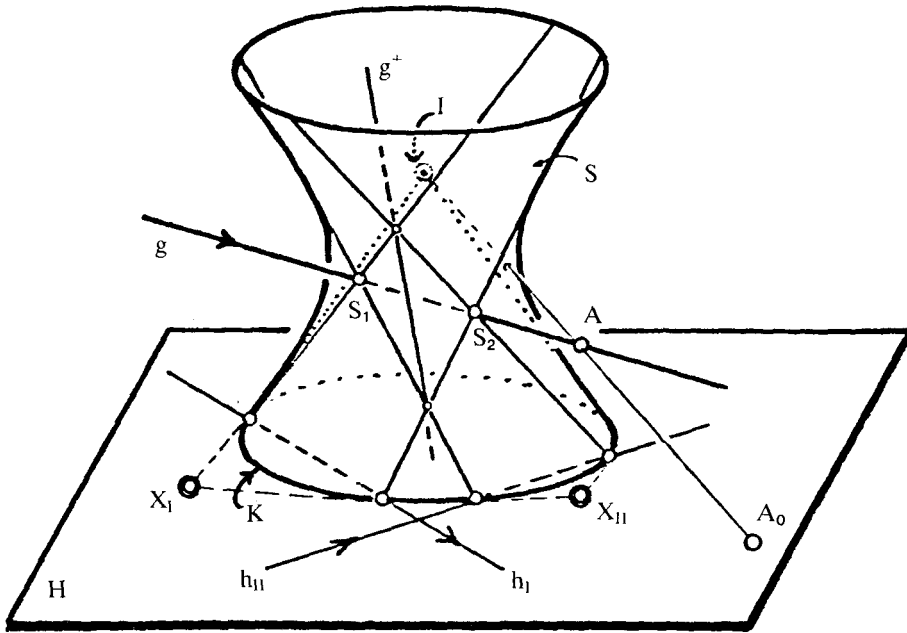


Abb. 1:  
Die ECKHART-REHBOCKsche Geradenabbildung

In [28] hat WUNDERLICH die ECKHART-REHBOCKsche Geradenabbildung mit dem STUDYschen Übertragungsprinzip in Verbindung gebracht.

#### 4.II) Geschlitzte kinematische Räume und deren Geradenabbildungen

Bei geschlitzten kinematischen Räumen ist das  $(n-2)$ -dimensionale Radikal  $g_\infty := \text{Rad } \mathbf{P}$  offensichtlich Polarraum jeder nicht parabolischen Geraden  $g$  aus  $\mathbf{P}$ . Aus Lemma 3 folgt damit:

**Satz 3:** Die kinematische Geradenabbildung aus einem geschlitzten kinematischen Raum ist injektiv für den Bereich aller nicht-parabolischen (d. h.  $g_\infty$  nicht treffenden) Geraden.

In einer geeigneten Basis  $1, e_1, \dots, e_n$  von  $\mathbf{A}$  lautet die Norm

$$N(x) = \xi_0^2 + \alpha \xi_1^2, \quad \alpha \in \{-1, +1\} \quad (4.7)$$

Im Fall  $\alpha = +1$  fällt  $\mathbf{S}$  mit  $g_\infty$  zusammen.  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  heie verallgemeinerter quasielliptischer Raum  $\mathbf{QEI}^n$ , da für  $n = 3$  sich der quasielliptische Raum von BLASCHKE

[3,6] ergibt. Im Fall  $\alpha = -1$  entartet  $\mathbf{S}$  zu einem Paar von Hyperebenen  $H_+, H_-$ , die von  $\mathbf{H}$  verschieden sind.  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  heie mit BRÖCKER [8] *Minkowskischer Raum*.

**Satz 4:** (a) *Die Dimension eines verallgemeinerten quasielliptischen Raumes ist ungerade, und es gibt (bis auf Isomorphie) zu jedem  $n = 2m + 1$  genau einen  $\mathbf{QEI}^n$ .*

(b) *Minkowskische Räume gibt es zu jeder Dimension  $n$ , und zu jeder Aufspaltung von  $n$  in der Form*

$$n = 2m + 1 + s \quad (m \geq 0, s \geq 0, \text{ ganz}) \quad (4.8)$$

*gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen Minkowskischen Raum.*

Die **Beweise** seien nur angedeutet<sup>12)</sup>: (a) für einen  $\mathbf{QEI}^n$  ist  $\alpha = +1$  in (4.7), daher gibt es ein  $e_1 \in \mathbf{V}$  mit  $-e_1^2 = N(e_1) = +1$ ; es folgt, daß  $e_2$  und  $e_3 := e_1 e_2$  linear unabhängig sind für beliebiges  $e_2 \in \text{Rad } \mathbf{A} - \{0\}$ ,  $U_1 := \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$  ist Ideal in  $\mathbf{A}$ . Nehmen wir an, wir hätten auf diese Weise maximal  $m$  Ideale  $U_k = \mathbb{R}e_{2k} + \mathbb{R}e_{2k+1}$  gefunden, so daß  $W := U_1 + \dots + U_m$  direkte Summe ist, so bekommt man für  $\mathbb{R}e_1 + W$  die Produkttafel

$$\begin{aligned} e_1^2 &= -1, \quad e_1 e_{2k} = -e_{2k} e_1 = e_{2k+1}, \quad e_1 e_{2k+1} = -e_{2k+1} e_1 = -e_{2k} \\ (k &= 1, \dots, m), \quad e_i e_j = 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit folgt

$$e_1 W = W e_1, \quad xW = Wx = \{0\} \quad \forall x \in \text{Rad } \mathbf{A} \quad (4.10)$$

Gäbe es ein  $x \in \text{Rad } \mathbf{A} - W$ , so wäre  $W + U$  mit  $U := \mathbb{R}x + \mathbb{R}e_1 x$  direkte Summe, im Widerspruch zur Maximalität von  $m$ . Also ist  $W = \text{Rad } \mathbf{A}$ ,  $\dim \mathbf{V} = 2m + 1$ . Durch (4.9) ist die kinematische Algebra von  $\mathbf{QEI}^n$  bis auf Isomorphie bestimmt.

(b) hnlich findet man zu einem  $n$ -dimensionalen Minkowskiraum mit jeder Aufspaltung (4.8) in einer geeigneten Basis  $1, e_1, \dots, e_{2m+1}, \dots, e_n$  die Produkttafel

$$\begin{aligned} e_1^2 &= +1, \quad e_1 e_{2k} = -e_{2k} e_1 = e_{2k+1}, \quad e_1 e_{2k+1} = -e_{2k+1} e_1 = e_{2k} \quad (k = 1, \dots, m), \\ e_1 e_{2m+1+r} &= -e_{2m+1+r} e_1 = e_{2m+1+r} \quad (r = 1, \dots, s), \\ e_i e_j &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Im Fall des  $\mathbf{QEI}^n$  ( $n$  ungerade) ist  $\text{ad } \mathbf{G}$  eine Untergruppe euklidischer Bewegungen des affinen Raumes  $\mathbf{H} - g_\infty$ . Für  $n = 3$  ist  $\text{ad } \mathbf{G}$  die volle Gruppe der eigentlichen ebenen euklidischen Bewegungen. Die kinematische Geradenabbildung ist die von BLASCHKE und GRÜNWALD her bekannte; ihre konstruktive Beschreibung findet man in [6], [3].

Im Fall eines Minkowskischen Raumes interessieren die Grenzfälle

$$(A) \quad n = 2m + 1 \quad (s = 0) \quad \text{und} \quad (B) \quad n = 1 + s \quad (m = 0).$$

Wir diskutieren sie der Einfachheit halber nur für  $n = 3$ , wo sie die beiden einzigen Minkowskischen Räume ergeben:

<sup>12)</sup> Ausführlicheres bei LÜBBERT [17].

(A) ( $s = 0$ ): Als Gegenstück zu  $\mathbf{QEI}^3$  erhält man den *indefinit-quasielliptischen*<sup>13)</sup> Raum  $\mathbf{QHI}^3$ ;  $\text{adG}$  besteht aus pseudo-euklidischen Bewegungen, die in der affinen Ebene  $\mathbf{H}-g_\infty$  die Richtungen  $n_2 = e_2 + e_3$ ,  $n_3 = e_2 - e_3$  festlassen.

(B) ( $m = 0$ ): Der kinematische Raum heie Homothetieraum  $\mathbf{Ht}^3$ .  $\text{adG}$  ist Gruppe der eigentlichen und uneigentlichen Homothetien (Streckungen)<sup>14)</sup> der Ebene  $\mathbf{H}-g_\infty$ .

Die kinematischen Geradenabbildungen von  $\mathbf{QHI}^3$  bzw.  $\mathbf{Ht}^3$  lassen sich ähnlich einfach wie die von  $\mathbf{QEI}^3$  konstruktiv beschreiben<sup>15)</sup>: Hierzu betrachten wir den affinen Raum  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{P}-\mathbf{H}_\infty$  mit Fernebene  $\mathbf{H}_\infty$  durch  $\mathbf{I}$  und  $g_\infty$  und in  $\mathbf{A}^3$  die parallelen Ebenen  $\mathbf{E} = \mathbf{H}-g_\infty$ ,  $\mathbf{E}_+ = \mathbf{H}_+-g_\infty$ ,  $\mathbf{E}_- = \mathbf{H}_-g_\infty$  ( $\mathbf{H}_+ \cap \mathbf{H}_- = \mathbf{S}$ ). Die Bildpunkte einer (zu  $\mathbf{E}$  nicht parallelen) Gerade  $g$  sind im Fall des  $\mathbf{Ht}^3$  die Projektionen  $\mathbf{X}'_+, \mathbf{X}'_- \in \mathbf{E}$  aus dem Fernpunkt  $\mathbf{I}$  der Schnittpunkte  $\mathbf{X}_+ = g \cap \mathbf{E}_+$ ,  $\mathbf{X}_- = g \cap \mathbf{E}_-$ . Ergänzt man nun  $\mathbf{X}'_+, \mathbf{X}'_-$  zu einem Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den absoluten Richtungen

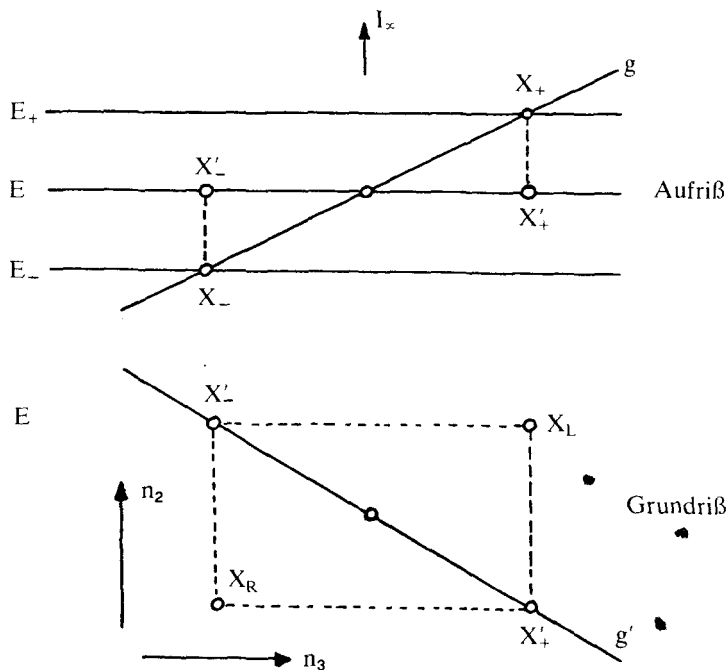


Abb. 2:  
Konstruktion der Bildpunkte  $\mathbf{X}'_+, \mathbf{X}'_-$  bzw.  $\mathbf{X}'_L, \mathbf{X}'_R$  für die Geradenabbildungen des  $\mathbf{Ht}^3$   
bzw. des  $\mathbf{QHI}^3$ .

<sup>13)</sup> Die Bezeichnung stammt von STRUBECKER [26].

<sup>14)</sup> BRÖCKER [8] zählt (wegen anderer Klassifizierungsmethoden) die Homothetierume (Strecktranslationsrume) nicht zu den Minkowskirumen.

<sup>15)</sup> Vgl. hierzu die „parabolischen Risse“ von REHBOCK [22].

$n_2 = e_2 + e_3$ ,  $n_3 = e_2 - e_3$  des  $\mathbf{QH}^3$  sind, so erhält man in den beiden restlichen Ecken  $X_L, X_R$  des Parallelogramms die Bildpunkte zur Geradenabbildung aus dem  $\mathbf{QH}^3$  (Abb. 2).

#### 4.III) Ausgeartete kinematische Räume und deren Geradenabbildungen

Bei ausgearteten kinematischen Räumen ist  $\text{Rad } \mathbf{A} = \mathbf{V}$ , damit fallen  $\text{Rad } \mathbf{P}, \mathbf{S}$  und  $\mathbf{H}$  zusammen; jede Gerade  $g \subset \mathbf{P}$  ( $g \not\subset \mathbf{S}$ ) ist parabolisch. Für  $a \in \mathbf{A} - \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  berechnet man nach (3.19):

$$a \hat{\wedge} \mathbf{x} = a \hat{r} \mathbf{x} = \mathbf{x} a$$

Damit ergibt sich

**Satz 5:** *Bei der kinematischen Geradenabbildung eines ausgearteten kinematischen Raumes fallen linker und rechter Bildpunkt einer Geraden  $g \not\subset \mathbf{S}$  stets zusammen. Jeder Bildpunkt  $X \in \mathbf{H}$  hat unendlich viele Urbildgeraden.*

Zu jeder Dimension gibt es jeweils mehrere nichtisomorphe ausgeartete Räume. Zur Klassifikation kann das Ideal

$$T = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{V} / \mathbf{x}\mathbf{y} = 0 \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V} \}$$

dienen; es gilt  $\dim T \geq 1$ . Ist  $\dim T = t$ , so heie  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  *t-fachisotroper kinematischer Raum*. Betrachten wir die Grenzfälle  $t = n$ ,  $t = 1$ : Für  $t = n$  ist  $\mathbf{A}$  kommutativ; die Links- (und Rechts-)Schiebungen in  $\mathbf{P}$  sind nichts anderes als die Translationen des affinen Raumes  $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} - \mathbf{H}$ . (Vgl. BRÖCKER [8]: Translationsrume).

Für  $t = 1$  muß die Dimension  $n$  ungerade sein;  $n = 3$  ergibt den von STRUBECKER [25,26] her bekannten einfach-isotropen Raum mit  $T$  als „vollisotroper Richtung“. Die Transformationen der Form  $X \in \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} \in \mathbf{P}$  ( $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{G}$ ) bilden die sogen. „Grenzgruppe“.

### 5. Schlußbemerkung zur Kinematik der Gruppe $\text{ad } \mathbf{G}$

Wie schon aus der Einleitung hervorgeht, gehört zu einer differenzierbaren Kurve  $A: t \in J \rightarrow (a(t)) \in \mathbf{G}$  ( $J$  reelles Intervall) in einem kinematischen Raum  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  ein Zwanglauf

$$\text{ad } A(t): \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$$

eines Gangraumes  $\mathbf{H}$  gegenüber einem Rastraum  $\hat{\mathbf{H}}$  ( $\mathbf{H}$  bzw.  $\hat{\mathbf{H}}$  ist in  $\mathbf{P}$  wieder Polaryperebene zum Einspunkt  $I$ ). Der Zwanglauf heie regulär, wenn keine der Tangenten an die Kurve  $A$  parabolisch ist. (Für ausgeartete kinematische Räume gibt es also keine regulären Zwangläufe). Die zu Beginn gestellte Frage nach der Eindeutigkeit des Gangpol-Rastpolpaares kann nun für nicht ausgeartete kinematische Räume so beantwortet werden:

**Satz 6:** *Ein regulärer Zwanglauf  $\text{ad } A(t): \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$  besitzt an jeder Stelle  $t_0$  genau ein Gangpol-Rastpolpaar, welches das kinematische Bild der (orientierten) Tangente an die Kurve  $A$  im Punkt  $A(t_0)$  ist.*

**Beweis:** Die orientierte Tangente  $\vec{g}(t_0)$  der Kurve  $A$  an der Stelle  $t_0$  habe das Bild  $(\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_R)$ ; für jedes weitere Gangpol-Rastpolpaar  $(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$  folgt aus (1.12)  $\mathbf{x}_L \mathbf{x} = \mathbf{x} \mathbf{x}_L$ ,  $\mathbf{x}_R \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}_R$ ; da  $g(t_0)$  nicht parabolisch ist, folgt hieraus nach Lemma 3:  $(\mathbf{x}) \in g(t_0)$   $A^{-1}(t_0)$ ,  $(\hat{\mathbf{x}}) \in A^{-1}(t_0)g(t_0)$  und damit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_L$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_R$ .

### Literatur

- [1] BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin–Göttingen–Heidelberg, Springer, 1959.
- [2] BLASCHKE, W.: Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschr. Math. Phys. **60** (1911), 61–91, 203–204.
- [3] BLASCHKE, W.: Ebene Kinematik. Hamburger Math. Einzelschr. **25** (1938), Berlin–Leipzig, Teubner.
- [4] BLASCHKE, W.: Nichteuklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Berlin–Leipzig, Teubner 1942.
- [5] BLASCHKE, W.: Kinematik und Quaternionen. Berlin, VEB Deutscher Vlg. der Wiss. 1960.
- [6] BLASCHKE, W. / MÜLLER, H.R.: Ebene Kinematik. München, Oldenbourg 1956.
- [7] BRAUNER, H.: Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen. Monatsh. Math. **77** (1973), 10–20.
- [8] BRÖCKER, L.: Kinematische Räume. Geometriae Dedicata **1** (1973), 241–278.
- [9] ECKHART, L.: Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie. Sitzsber. Akad. Wiss., Wien II a **132** (1923), 177–192.
- [10] ECKHART, L.: Konstruktive Abbildungsverfahren. Wien, Springer 1926.
- [11] FUBINI, G.: Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici. Annali della Scuola Normale, Pisa **9** (1904).
- [12] GRÜNWARD, J.: Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Sitzsber. Akad. Wiss., Wien II a **80** (1911), 677–741.
- [13] HJELMSLEV, J.: Geometrie des droites dans l'espace non eucliden. Kopenhagen Verhandlg. Akad. (1900), 308–330.
- [14] KARZEL, H.: Kinematic spaces. Ist. Naz. Alta Math. Symposia Mathematica, **11** (1973), 413–439.
- [15] KARZEL, H.: Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **41** (1974), 158–171.
- [16] LÜBBERT, C.: Über Regelflächen konstanter Striktion oder konstanten Dralls im elliptischen Raum. Sitzsber. Akad. Wiss., Wien, Kl. II **184** (1975), 12–28.
- [17] LÜBBERT, C.: Die kinematischen Geradenabbildungen. Habilitationsschrift. Prepint 278, Darmstadt (1976).
- [18] LÜBBERT, C.: Über geschlossene Regelflächen im elliptischen Raum. Journal of Geometry, Vol. **11/1** (1978), 35–54.
- [19] MÜLLER, H.R.: Die kinematischen Abbildungen im dreidimensionalen Raum. Monatsh. Math. **65** (1961), 252–258.
- [20] MÜLLER, H.R.: Sphärische Kinematik. Berlin, VEB Deutscher Vlg. der Wiss. 1962.

- [21] REHBOCK, F.: Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. *Monatsh. Math. Phys.* **38** (1931), 257–274.
- [22] REHBOCK, F.: Über parabolische Risse. *Math. Ann.* **109** (1934), 17–59.
- [23] SCHRÖDER, E.M.: Kennzeichnung und Darstellung kinematischer Räume metrischer Ebenen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **39** (1973), 184–229.
- [24] STRUBECKER, K.: Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation. *Sitzgsber. Akad. Wiss., Wien IIa* **139** (1930), 685–705.
- [25] STRUBECKER, K.: Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. *Journ. reine u. angew. Math.* **178** (1938), 135–173.
- [26] STRUBECKER, K.: Über Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. *Math. Zeitschr.* **52** (1950), 401–435.
- [27] STUDY, E.: *Geometrie der Dynamen*. Leipzig, Teubner 1903.
- [28] WUNDERLICH, W.: Eckhart-Rehbocksche Abbildung und Studysches Übertragungsprinzip. *Publicationes Mathematicae, Debrecen* **7** (1960), 94–107.