Ein Zusammenhang zwischen 1-Faktoren, Doppelsternen und gewissen Durchlaufungen von Graphen

Kaluza, Theodor

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.59-63

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ein Zusammenhang zwischen 1-Faktoren, Doppelsternen und gewissen Durchlaufungen von Graphen

Von **Theodor Kaluza**, Hannover

Ein *Doppelstern* DS ist ein schlingenfreier Graph, der aus zwei nicht-leeren fremden Serien von Kanten a_i —— b, c —— d_j und einer von diesen Kanten verschiedenen *Achse* b —— c besteht. Ein Doppelstern eDS *im engeren Sinne* liegt vor, wenn alle Kanten a_i —— b und c —— d_j Endkanten sind. Ein eDS ist also ein Baum, während ein DS sonst Dreiecke und Mehrfachkanten enthalten kann; ein Weg der Länge 3 ist ein eDS. Als Teilgraph eines Graphen G heißt ein DS *halbierend*, wenn in G $g(b)=2s+1$ und $g(c)=2s'+1$, im DS aber $g(b)=s+1$ und $g(c)=s'+1$ ist. Gerichtet sollen DS stets so werden, daß entweder alle Kantenzüge $a_i \to b \to c \to d_j$ oder alle Kantenzüge $d_j \to c \to b \to a_i$ richtungstreu sind.

Satz 1: Ein endlicher schlingenfreier Graph, bei dem alle Ecken einen ungeraden Grad ≥ 3 haben, besitzt genau dann einen 1-Faktor, wenn er sich in kantenfremde halbierende Doppelsterne zerlegen läßt; – die Achsen der DS bilden dann jeweils einen 1-Faktor, und die Kanten jedes 1-Faktors sind die Achsen mindestens einer solchen Zerlegung.

Beweis: I. Wenn die Kanten b_1 —— $c_1, \ldots$ einen 1-Faktor von G bilden, ist G–F ein Graph geraden Grades, dessen Zusammenhangs-Komponenten also je eine geschlossene Euler-Durchlaufung besitzen. Richtet man die Kanten von G–F so, wie sie dabei durchlaufen werden, so ist G–F ausbalanciert. Man erhält daher eine Zerlegung der im Satz 1 genannten Art, wenn man jede Faktor-Kante b_p —— c_p durch Hinzufügen der bei b_p oder bei c_p endenden Kanten $a_{i,p} \to b_p$ bzw. $d_{j,p} \to c_p$ von G–F zu einem DS ergänzt.

II. G sei in q kantenfremde halbierende Doppelsterne DS_p zerlegt. Ist e die Eckenzahl von G, so genügt es zu zeigen, daß (a): die Achsen der DS endpunktfremd sind, und (b): $2q \geq e$ ist;

(a): wäre eine Ecke v von G Endpunkt von zwei DS-Achsen, so wäre sie, wenn $g(v)=2s+1$ ihr Grad in G ist, in jedem der beiden DS mit $s+1$ Kanten inzident; wegen der Kantenfremdheit der DS würde das den Widerspruch $2s+2 \leq 2s+1$ bedeuten, – die DS-Achsen sind also endpunktfremd;

(b): es seien $b_1, c_1, \ldots, b_q, c_q$ die DS-Achsen-Endpunkte und $g(b_p)=2s_p+1$ bzw. $g(c_p)=2s'_p+1$ $(p=1,\ldots,q)$ ihre Grade in G; falls $2q<e$ sein sollte, sei weiter $\{v_r\}$ $(r=2q+1,\ldots,e)$ die Menge der übrigen Ecken von G, und es seien $g(v_r)=2s_r+1$ ihre Grade in G;

dann gilt für die Kantenzahl k von G nach einer elementaren Formel für endliche schlingenfreie Graphen

$$2k = \sum_{p=1}^{q} [(2s_p+1) + (2s_p'+1)] + \sum_{r=2q+1}^{e} (2s_r+1)$$

$$k = \sum_{p=1}^{q} (s_p+s_p') + q + \frac{1}{2} \sum_{r=2q+1}^{e} (2s_r+1);$$

andererseits gehört jede Kante zu genau einem der DS_p und ist dort entweder Achse oder nicht, – also ist

$$k = \qquad (s_p + s_p') + q;$$

da die $s_r \geq 1$ wären, führt die Annahme $2q < e$ also zu einem Widerspruch. □

Corollar 1: Ist G zusätzlich ohne Mehrfach-Kanten und ohne Dreiecke, so kann in Satz 1 anstelle von „DS" spezieller „eDS" gesagt werden.

Vermutlich kann man hier die Voraussetzung „ohne Dreiecke" sogar fallen lassen.

Corollar 2: Ist G endlich, schlicht und 3-regulär, so besitzt G genau dann einen 1-Faktor, wenn G sich in kantenfremde Wege der Länge 3 zerlegen läßt.

Der Teil I des Beweises von Satz 1 legt nahe, nicht nur G–F, sondern auch G selbst zu durchlaufen: Es sei G ein Graph und $Z = a_0 — a_1 — a_2 — \ldots$ ein endlicher Kantenzug in G. Wir nennen eine Kante $b — c$ von G *eine m-Kante in Z,* wenn für genau m verschiedene Indizes i $a_i — a_{i+1} = b — c$ ist, – anschaulich, wenn beim Durchlaufen von Z diese Kante m-mal durchlaufen wird.

Satz 2: G sei endlich, schlingenfrei, zusammenhängend und $(2s+1)$-regulär für ein $s \geq 1$; dann gilt:

G besitzt *genau dann* einen 1-Faktor, *wenn* es einen geschlossenen Kantenzug $a_0 — a_1 — \ldots — a_L$ $(a_L = a_0)$ gerader Länge gibt, der alle Kanten von G enthält, und in dem stets $a_{2p} — a_{2p+1}$ 1-Kante und $a_{2p+1} — a_{2p+2}$ 2s-Kante ist; – die 2s-Kanten jeder solchen Durchlaufung von G bilden einen 1-Faktor, und zu jedem 1-Faktor gibt es mindestens eine solche Durchlaufung, bei der die 2s-Kanten gerade die Faktor-Kanten sind.

Satz 2 ist enthalten in dem weitergehenden

Satz 2′: (1) Besitzt ein schlingenfreier Graph G eine geschlossene Durchlaufung gerader Länge, in der abwechselnd 1-Kanten und $2s_p$-Kanten auftreten, – wobei die $s_p \geq 1$ bei verschiedenen Kanten verschieden sein dürfen –, so bilden die $2s_p$-Kanten einen 1-Faktor.

(2) Ein endlicher schlingenfreier zusammenhängender Graph G besitzt eine Durchlaufung wie in (1), wenn er einen 1-Faktor besitzt, bei dem die beiden Endpunkte jeder Faktor-Kante den gleichen ungeraden – von Kante zu Kante evtl. verschiedenen – Grad ≥ 3 haben.

Beweis: (1): Es seien $b_p — c_p$ die mehrfach durchlaufenen Kanten, m ihre Anzahl, L die Länge der Durchlaufung und k die Anzahl der Kanten von G; dann folgt aus dem Aufbau der Durchlaufung:

(a) jede Ecke von G ist mit mindestens einer der Kanten b_p——c_p inzident.
(b) bei geeigneter Indizierung ist $g(b_p) = g(c_p) = 2s_p + 1$,

(c) es ist $\frac{1}{2} L = k - m = \sum_{p=1}^{m} 2s_p$;

also ist – immer von $1, \ldots, m$ summiert:

$$k = \sum (2s_p + 1) = \sum g(b_p) = \sum g(c_p);$$

da G eine geschlossene, also endliche Durchlaufung besitzt, ist G endlich, und man hat – wenn $v_1, \ldots, v_e$ die Ecken von G sind:

$$2k = \sum_{i=1}^{e} g(v_i) = \sum_{p=1}^{m} [g(b_p) + g(c_p)];$$

da hier alle Summanden positiv sind, folgt aus (a) die Aussage (1);

(2): Es seien b_p——c_p die Kanten eines 1-Faktors von G, bei dem die Voraussetzung $g(b_p) = g(c_p) = 2s_p + 1$ erfüllt ist. Dann soll G′ den Graphen bedeuten, der aus G entsteht, wenn man für alle p die Kante b_p——c_p durch eine $2s_p$-fache Mehrfach-Kante ersetzt. Wir nennen diese Kanten von G′ E-Kanten. In G′ ist jede Ecke mit einer geraden Zahl von E-Kanten und mit der gleichen Zahl von nicht-E-Kanten inzident. Beginnt man also eine Durchlaufung von G′ mit einer nicht-E-Kante, so kann man zunächst die Regeln einhalten:

Man setzt stets mit einer noch nicht durchlaufenen Kante fort, und man wählt abwechselnd E-Kanten und nicht-E-Kanten; eine Fortsetzung kann nur dann unmöglich sein, wenn zuletzt die $2s_p$-te mit dem Anfangspunkt a_0 der zuerst gewählten Kante inzidente E-Kante nach a_0 durchlaufen wurde: es liegt dann ein geschlossener, alle mit a_0 inzidenten Kanten enthaltender Kantenzug Z_1 vor, der von jeder Ecke, die er durchläuft, ebensoviele mit ihr inzidente E-Kanten wie nicht-E-Kanten enthält. Gibt es noch Kanten, die nicht zu Z_1 gehören, kann man mit einer nicht-E-Kante neu beginnen,..., bis G′ in kantenfremde geschlossene Kantenzüge gerader Länge zerlegt ist, die abwechselnd E-Kanten und nicht-E-Kanten enthalten. Schneidet man dann zwei solche Kantenzüge mit gemeinsamer Ecke a bei a auf, um sie zusammenzufügen, so muß man evtl. bei einem von ihnen die Durchlaufungsrichtung umkehren, damit bei der Vereinigung E-Kanten und nicht-E-Kanten miteinander abwechseln. Nach endlich vielen Schritten bekommt man so eine Durchlaufung Z′ von G′, deren Bild Z in G die behaupteten Eigenschaften hat. □

Für die Durchlaufungen nach Satz 2 oder Satz 2′ bestehen neben vielen anderen zwei extreme Möglichkeiten:

jede $2s_p$-Kante wird in jeder der beiden möglichen Richtungen gleichoft durchlaufen, – dann heißt die Durchlaufung *ausbalanciert,*

jede $2s_p$-Kante wird jedesmal in der gleichen Richtung durchlaufen, – wir sagen dann, die Durchlaufung habe *die Einbahnstraßen-Eigenschaft EE;*
das Tetraeder besitzt ausbalancierte Durchlaufungen und solche, die weder ausbalanciert sind noch die EE haben, aber keine, die die EE hat;

über die EE verifiziert man leicht den

Satz 3: Für Graphen, die eine Durchlaufung nach Satz 2 oder nach Satz 2′ besitzen, gilt:
ist der Graph bipartit, so hat jede Durchlaufung die EE, – ist er nicht bipartit, so hat keine Durchlaufung die EE.

Es gibt endliche 3-reguläre Graphen mit 1-Faktor, bei denen keine Durchlaufung nach Satz 2 oder 2′ ausbalanciert ist oder die EE hat: man hängt mit Hilfe von Brücken nicht-bipartite Teile an einen bipartiten Teil.

Hat ein endlicher schlingenfreier Graph ungeraden Grades ≥ 3 1-Faktoren, so kann man versuchen, die DS einer Zerlegung in kantenfremde halbierende DS nach Satz 1 im Sinne der Bemerkung unmittelbar vor Satz 1 so zu richten, daß die d-Ecken jedes DS als Ecken anderer DS gesehen stets b-Ecken und die a-Ecken stets c-Ecken dieser anderen DS sind; ist das möglich und geschehen, so nennen wir die Zerlegung alternierend gerichtet;
mit den Gedanken des Beweises von Satz 1, den eben beschriebenen Gegebenheiten und elementaren Sätzen verifiziert man dann ohne weiteres den

Satz 4: Für endliche schlingenfreie Graphen ungeraden Grades ohne Endpunkte gilt:
ist G *bipartit,* so läßt sich *jede* etwa existierende Zerlegung von G in kantenfremde halbierende DS alternierend richten, – ist G *nicht bipartit,* so läßt sich *keine* solche Zerlegung alternierend richten.

Abgesehen von der hinter Corollar 1 geäußerten Vermutung lassen sich die Voraussetzungen wohl kaum abschwächen, denn man kann durch einfachste Beispiele zeigen:

Zu Satz 1: Sind die DS oder eDS einer Zerlegung nicht halbierend, so brauchen ihre Achsen keinen 1-Faktor zu bilden. Beispiel: Drei eDS mit den Achsen b —— c, b' —— c', b'' —— c'' und den gleichen Ecken a_1, a_2 und d_1, d_2. Ferner: Läßt man im K_5 eine Kante fort, so läßt sich der Rest in drei eDS, nämlich in Wege der Länge 3 zerlegen; – er enthält Ecken vierten Grades, und die eDS-Achsen bilden keinen 1-Faktor.

Zu Satz 2′ (2): Es gibt endliche, schlingenfreie Graphen ungeraden Grades ≥ 3 mit 1-Faktoren, die keine Durchlaufung nach Satz 2′ (2) besitzen, weil einer der ungeraden Eckengrade nur bei einer Ecke auftritt. Beispiel: Ein Rad mit fünf Speichen.

Bei *unendlichen* schlingenfreien zusammenhängenden Graphen ungeraden Grades ≥ 3 bleibt richtig: Zu jedem 1-Faktor gibt es Zerlegungen in kantenfremde halbierende DS, deren Achsen die Faktor-Kanten sind. (Beweis ähnlich (1) im Beweis von Satz 1: $G-F$ ist wieder geraden Grades und daher Vereinigung von Kreisen und beiderseitig unendlichen Wegen.) Die Achsen einer solchen Zerlegung brauchen aber keinen 1-Faktor zu bilden: Sie sind aus demselben Grunde wie im Beweisteil II. (a) von Satz 1 endpunktfremd, brauchen aber nicht alle Ecken des Graphen zu erfassen.

Beispiele mit einer vorgeschriebenen Anzahl von nicht-erfaßten Ecken lassen sich im 6-Eck-Gitter finden und noch leichter durch induktiven Aufbau aus Wegen der Länge 3 konstruieren. Durchlaufungen mit jetzt unendlichen Kantenzügen nach Satz 2 oder 2′ schließlich sind z. B. bei unendlichen Bäumen ungeraden Grades ohne Endkanten unmöglich: – wäre etwa a —— b —— c ein Teil einer solchen Durchlaufung, bei dem a —— b eine nicht-1-Kante und b —— c eine 1-Kante ist, und ist dabei o. B. d. A. diese Durchlaufung von a —— b nicht die letzte, so müßte wegen der Kreislosigkeit die Fortsetzung a —— b —— c —— ... —— c —— b —— a lauten: b —— c wäre doch nicht 1-Kante. □