Zur nicht-euklidischen Geometrie

Salzmann, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977,
S.119

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur nicht-euklidischen Geometrie

Von **Helmut Salzmann**

C. F. Gauß hat 1816 zuerst erkannt, daß eine nicht-euklidische Geometrie widerspruchsfrei denkbar ist. Beim axiomatischen Aufbau der ebenen Geometrie wird eine Inzidenz-Struktur zu Grunde gelegt, die sich zu einer projektiven Ebene erweitern läßt. Im folgenden sei eine solche Erweiterung bereits angenommen. Der projektiven Ebene wird dann zusätzlich eine Stetigkeits-Struktur (meist in Form von Anordnung) und eine metrische Struktur aufgeprägt. Die drei verschiedenen Struktur-Komponenten müssen dabei in naheliegender Weise miteinander verträglich sein. Die Metrik kann auf unterschiedliche Art (etwa als Kongruenz oder als Orthogonalität) gegeben werden. Bewegungen sind dann diejenigen Automorphismen der topologischen Inzidenz-Struktur $\mathbb{P}$, welche die Metrik invariant lassen. Im Wesentlichen kommt es nur auf die Bewegungsgruppe Δ an. Daher soll eine (ebene) Geometrie von vornherein als ein Paar $(\mathbb{P}, \Delta)$ eingeführt werden, das aus einer (topologischen) projektiven Ebene $\mathbb{P}$ und einer geeigneten Untergruppe von Aut $\mathbb{P}$ als Bewegungsgruppe besteht. In den klassischen Fällen laufen die Stetigkeits-Forderungen darauf hinaus, daß die Geraden lokal kompakt und topologisch eindimensional sind. Die Punktmenge P ist dann eine Fläche. Hier soll allgemeiner nur vorausgesetzt werden, daß P lokal kompakt und zusammenhängend ist. (Verbinden und Schneiden seien natürlich stetige Operationen.) Die Bewegungsgruppe Δ ist dann eine lokal kompakte Transformationsgruppe von P. In diesem Rahmen gibt es folgende Kennzeichnungen der nicht-euklidischen Ebenen über den klassischen Körpern $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und dem Divisionsring $\mathbb{O}$ der Oktaven:

(1) Ist Δ kompakt und transitiv auf P, so ist $\mathbb{P}$ eine Moufang-Ebene, und Δ eine elliptische Bewegungsgruppe (SO_3, $PSU_3(\mathbb{C})$, $PU_3(\mathbb{H})$ oder F_4).

Hyperbolische Gegenstücke sind bisher nur für dim $P = d \leq 8$ bekannt:

(2) Ist Δ nicht kompakt, läßt Δ keinen Punkt und keine Gerade fest, und hat Δ dieselbe Dimension wie die entsprechende elliptische Bewegungsgruppe (also 3, 8 oder 21), so ist Δ äquivalent zur hyperbolischen Bewegungsgruppe; außer im Fall $d = 2$ ist dann $\mathbb{P}$ eine desarguessche Ebene.

Die Hauptschwierigkeiten liegen beim Beweis des desarguesschen Satzes (der nicht vorausgesetzt werden soll), sowie auf dem Weg dahin beim Nachweis der Liegruppen-Eigenschaft von Δ und der Tatsache, daß die Geraden homöomorph zu einer Sphäre sind.

Allgemein gilt:

(3) Ist $4 < d < 14$ und dim $\Delta > 20$, so ist $\mathbb{P}$ desarguessch.

Dagegen können 4-dimensionale Ebenen mit 8-dimensionaler Gruppe echte Translations-Ebenen sein.