

# Hyperbelbillard

Rieger, G.J.

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 49, 1998,  
S.141-153



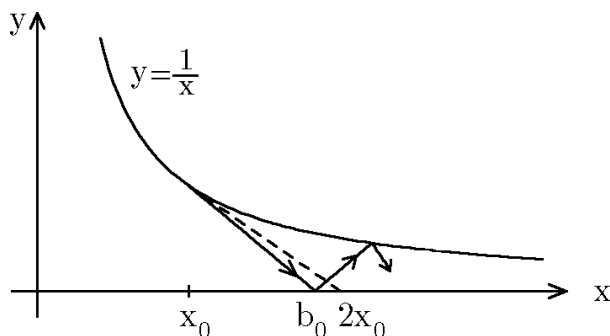
J. Cramer Verlag, Braunschweig

## Hyperbelbillard

von **G. J. Rieger**, Hannover\*

(Eingegangen am 04.10.1998)

Wir betrachten  $\mathbb{R}^2$  als euklidische Ebene mit den Koordinaten  $x, y$ ; wir möchten Billard spielen mit Lichtstrahlen mittels Spiegelungen an der Hyperbel  $y = f(x) := \frac{1}{x}$  und an ihrer Asymptote  $y = 0$ ; der Einfallswinkel gleicht also jeweils dem Ausfallswinkel. Wir wählen  $a \in \mathbb{R}, a > 0$ ; die Tangente an die Kurve  $f$  im Punkt  $a$  trifft die Gerade  $y = 0$  im Punkt  $2a$ ; wir wählen daher  $b \in \mathbb{R}, a < b \leq 2a$  und beginnen mit  $x_0 := a, b_0 := b$  und dem wiederholt zu spiegelnden Strahl von  $(x_0, f(x_0))$  nach  $(b_0, 0)$ .



Figur 1

Die weiteren Spiegelungen mögen stattfinden für  $(x_1, f(x_1)), (b_1, 0), (x_2, f(x_2)), (b_2, 0), \dots$ ; der Vorgabe

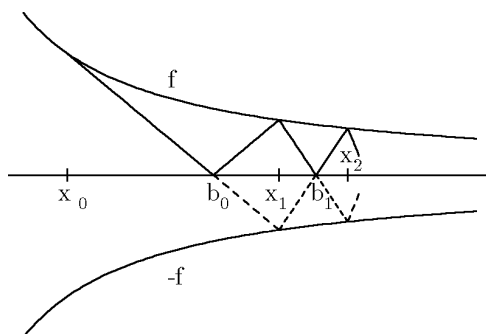
$$(1) \quad 0 < a < b \leq 2a$$

wird also zugeordnet

$$x_0 < b_0 < x_1 < b_1 < x_2 < \dots$$

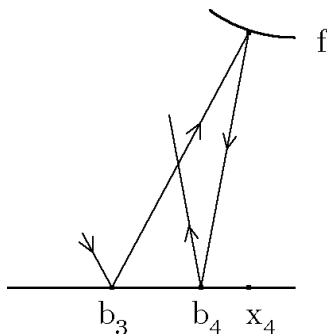
---

\* Prof Dr. G. J. Rieger · Universität Hannover · Institut für Mathematik · Welfengarten 1  
D-30167 Hannover



Figur 2

mit  $x_j = x_j(a, b)$ ,  $b_j = b_j(a, b)$ ; gemäß [1] bricht diese Ungleichungskette nach endlichvielen Schritten ab; d. h. der Strahl kehrt um gemessen in der  $x$ -Richtung; das kann etwa so aussehen:



Figur 3

In dieser Note geben wir obere Abschätzungen für die Schrittzahl und für die auftretenden  $x_n$  in Abhängigkeit von  $a$  allein.

Wir schreiben jetzt  $x_n$ ,  $b_n$  konkret hin. Dazu erklären wir  $\alpha_0$  gemäß

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha_0 := x_0^2;$$

wir klären  $\vartheta_0$  gemäß

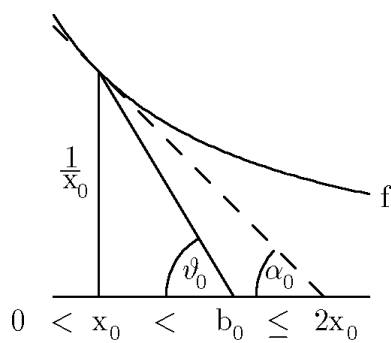
$$0 < \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \vartheta_0 = \frac{1}{x_0(b_0 - x_0)};$$

es sei

$$t_0 := \tan \vartheta_0;$$

dann ist

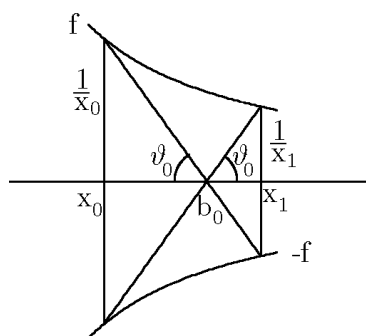
$$t_0 > 0, b_0 = x_0 + \frac{1}{x_0 t_0}, 0 < \alpha_0 \leq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}.$$



Figur 4

Für  $x_1$  möge gelten

$$x_1(x_1 - b_0) = t_0^2 (= x_0(b_0 - x_0)),$$



Figur 5

und wir wählen daher

$$x_1 := \frac{1}{2} \left( b_0 + \sqrt{b_0^2 + \frac{4}{t_0^2}} \right).$$

Dann ist

$$b_0 \leq 2x_0 \Leftrightarrow x_1 \leq x_0 (1 + \sqrt{2})$$

und

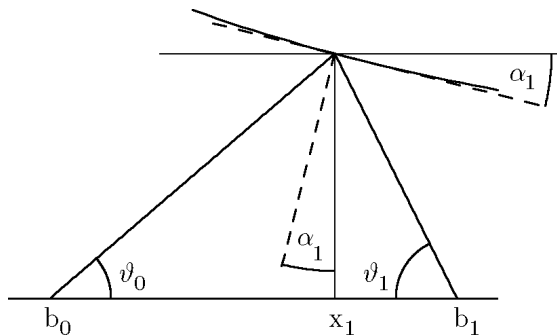
$$\begin{aligned} x_0 < b_0 < x_1, \quad x_0 + x_1 < 2b_0, \\ x_1 - x_0 < 2(b_0 - x_0) \leq 2x_0, \quad x_1 < 3x_0. \end{aligned}$$

Wir erklären  $\alpha_1$  gemäß

$$0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha_1 = x_1^{-2};$$

dann ist  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Die gewünschte Spiegelung an  $f$  erfordert

$$\vartheta_1 := \vartheta_0 + 2\alpha_1;$$



Figur 6

es ist

$$\vartheta_1 > \alpha_1, \quad \vartheta_1 > \vartheta_0.$$

Für  $\vartheta_1 \geq \frac{\pi}{2}$  (vgl. auch Figur 3) ist das Verfahren beendet. Für  $\vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$  geht das Verfahren weiter; dann ist

$$\vartheta_0 < \frac{\pi}{2} - \alpha_1,$$

$$x_1(x_1 - b_0) = \frac{1}{\tan \vartheta_0} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) > \tan \alpha_1 = x_1^{-2},$$

$$x_1 - x_0 > 2(x_1 - b_0) > 2x_1^{-3} > \frac{2}{27}x_0^3.$$

Es sei

$$t_1 := \tan \vartheta_1, \quad b_1 := x_1 + \frac{1}{x_1 t_1}.$$

Es ist

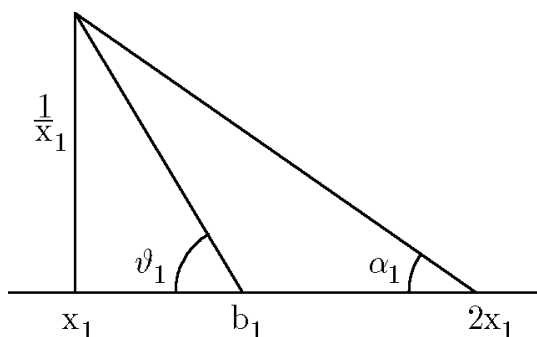
$$t_0 < t_1, \quad x_1 < b_1 < 2x_1.$$

Wegen

$$\frac{1}{t_1} < \frac{1}{t_0} = x_1(x_1 - b_0)$$

ist

$$b_0 + b_1 < 2x_1.$$



Figur 7

Für  $x_2$  möge gelten (vgl. auch Figur 5)

$$x_2(x_2 - b_1) = t_1^{-1} (= x_1(b_1 - x_1)),$$

und wir wählen daher

$$x_2 := \frac{1}{2} \left( b_1 + \sqrt{b_1^2 + \frac{4}{t_1}} \right).$$

Dann ist

$$x_1 < b_1 < x_2, \quad x_1 + x_2 < 2b_1,$$

$$x_2 - x_1 < 2(b_1 - x_1) < 2x_1, \quad x_2 < 3x_1.$$

Wir erklären  $\alpha_2$  gemäß

$$0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha_2 = x_2^{-2};$$

dann ist  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Die gewünschte Spiegelung an  $f$  erfordert

$$\vartheta_2 := \vartheta_1 + 2\alpha_2;$$

es ist

$$\vartheta_2 > \alpha_2, \vartheta_2 > \vartheta_1.$$

Für  $\vartheta_2 \geq \frac{\pi}{2}$  ist das Verfahren beendet. Für  $\vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$  geht das Verfahren weiter, dann ist

$$\vartheta_1 < \frac{\pi}{2} - \alpha_2,$$

$$x_2(x_2 - b_1) = \frac{1}{\tan \vartheta_1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right) > \tan \alpha_2 = x_2^{-2},$$

$$x_2 - x_1 > 2(x_2 - b_1) > 2x_2^{-3} > \frac{2}{27} x_1^{-3}.$$

Es sei

$$t_2 := \tan \vartheta_2, b_2 := x_2 + \frac{1}{x_2 t_2}.$$

Es ist

$$t_1 < t_2, x_2 < b_2 < 2x_2, b_1 + b_2 < 2x_2;$$

so macht man weiter und erhält schematisch

$$((x, b) \rightarrow (\alpha, \vartheta, t))_0 \rightarrow (x, \alpha, \vartheta; t, b)_1 \rightarrow (x, \alpha, \vartheta; t, b)_2 \rightarrow \dots$$

Wir möchten also zeigen, daß das Verfahren nach endlichvielen Schritten bei einem „;“ endet.

Für (1) und für ein gewisses  $k \geq 0$  seien

$$x_0 < b_0 < x_1 < \dots < b_{k-1} < x_k$$

konstruiert; wir haben dann:

- 1.)  $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_k > 0$ ,
- 2.)  $0 < \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_k < \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_n \leq \vartheta_n$ ,
- 3.)  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ ,
- 4.) die Längen der aufeinanderfolgenden Intervalle

$$x_0 < b_0 < x_1 < b_1 < \dots < x_{k-1} < b_{k-1} < x_k$$

wie auch

$$x_0 < x_1 < \dots < x_k$$

nehmen nach rechts hin monoton ab,

$$5.) \quad x_{n+1} - x_n > 2x_{n+1}^{-3} > \frac{2}{27}x_n^{-3},$$

6.) für

$$x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+s} < 2x_n,$$

ist

$$x_n > s \cdot 2x_{n+s}^{-3} \text{ und daher } s < 4x_n^4,$$

7.) wegen (1) ist  $x_n \leq (2n+1)a$ .

**Beispiel 1.** Für  $b = 2a$  ist  $\alpha_0 = \vartheta_0$ ,  $\tan \vartheta_0 = x_0^2$ ,  $x_1 = x_0(1+\sqrt{2})$ ,  $\tan \alpha_1 = x_1^2$ ; es ist

$$\vartheta_1 := \vartheta_0 + 2\alpha_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \tan \vartheta_0 \cdot \tan(2\alpha_1) = 1;$$

das ist gleichwertig mit

$$x_0 = \bar{a} := (23 - 16\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} = 0,781278\dots;$$

dazu gehören

$$\vartheta_0 = 58,60028\dots^\circ, \alpha_1 = 15,69985\dots^\circ;$$

für  $b \leq 2a \leq 2\bar{a}$  ist das Verfahren also schon bei  $\vartheta_1$  beendet.

**Beispiel 2.** Es sei  $a = 1, b = 2$ ; dann ist  $\alpha_0 = 45^\circ$ ,  $\vartheta_0 = 45^\circ$ ,  $t_0 = 1$ ; es folgt

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} = 2,4142\dots, \alpha_1 = 9,7356\dots^\circ,$$

$$\vartheta_1 = 64,471\dots^\circ, t_1 = 2,0938\dots, b_1 = 2,6120\dots;$$

es geht weiter mit

$$x_2 = 2,7836\dots, \alpha_2 = 7,35\dots^\circ,$$

$$\vartheta_2 = 79,18\dots^\circ, t_2 = 5,23\dots, b_2 = 2,85\dots;$$

es geht weiter mit

$$x_3 < 3, \alpha_3 > 6^\circ, \vartheta_3 > 90^\circ;$$

das Verfahren ist beendet.

Es sei

$$y_n := \frac{1}{x_n}, s_n := \frac{y_n - y_{n+1}}{x_{n+1} - x_n};$$

es ist

$$t_0 \leq t_n = \frac{y_n + y_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \quad (\text{vgl. auch Figur 5}),$$



$$\begin{aligned}
 C\alpha_n &\geq 1 < \frac{\tan \alpha_n}{\alpha_n} \leq C := \frac{\tan \alpha_0}{\alpha_0}, \quad \text{ehne)} \\
 (2) \quad &= t_n \frac{y_n - y_{n+1}}{y_n + y_{n+1}} \geq t_0 \frac{y_n - y_{n+1}}{y_n + y_{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Wir definieren eine (wie sich zeigen wird: abbrechende) Folge  $g_0 < g_1 < g_2 \dots$  ganzer Zahlen gemäß

$$\begin{cases} g_0 := 0 \\ g_{j+1} \text{ (falls vorhanden) sei minimal mit } y_{g_{j+1}} \leq \frac{1}{2} y_{g_j}; \end{cases}$$

wegen  $f' < 0$  ist  $g_j < g_{j+1}$ . In Beispiel 1 gibt es nur  $g_0 = 0, g_1 = 1$ .

**Fall 1.** Es gibt nur  $g_0$ . Dann ist stets  $x_n < 2x_0 = 2a$ .

**Fall 2.** Für ein gewisses  $k > 0$  gilt  $g_0 < g_1 < \dots < g_k$ . Mit  $0 \leq j < k$  summieren wir (2) für  $g_j \leq n < g_{j+1}$ ; wegen  $f' < 0$  ist

$$y_n \leq y_{g_j}, y_{n+1} < y_{g_j}, y_n + y_{n+1} < 2y_{g_j}$$

und daher

$$C(\alpha_{g_j} + \dots + \alpha_{g_{j+1}-1}) > \frac{t_0}{2y_{g_j}} (y_{g_j} - y_{g_{j+1}}) \geq \frac{t_0}{4}.$$

Summe über  $0 \leq j < k$  gibt

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_{g_{k-1}} > \frac{kt_0}{4C}.$$

Wegen

$$\frac{t_0}{C} = \frac{\alpha_0 \tan \vartheta_0}{\tan \alpha_0} \geq \alpha_0$$

folgt

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{g_{k-1}} > \alpha_0 \left( \frac{k}{4} - 1 \right).$$

Die linke Seite muß auf Grund des Verfahrens aber kleiner sein als  $\frac{\pi}{4}$  bleiben. Zwangsläufig ist also

$$k < 4 + \frac{\pi}{\alpha_0},$$

und es ist

$$x_n < 2x_{g_k}$$

stets. Wegen

$x_{g_{j+1}} \leq x_{g_{j+1}-1} + (x_{g_{j+1}} - x_{g_{j+1}-1}) \leq 2x_{g_j} + (x_1 - x_0) \leq (2 \cdot 4^j + 2)x_0 \leq 4^{j+1}a$   
ergibt Induktion sofort

$$x_{g_j} \leq 4^j a.$$

Beide Fälle zusammen ergeben also

$$k < 4 + \frac{\pi}{\alpha_0}, \quad x_n \leq 2g_k \leq 2 \cdot 4^k a.$$

Nach 6.) gibt es folglich höchstens

$$(4^{k+1}a)^4$$

Spiegelungen an  $y = 0$  bis zur Umkehr des Strahls. Für (1) bezeichne  $m(a; b)$  das sicherlich vorhandene kleinste  $m$  mit  $\vartheta_m \geq \frac{\pi}{2}$ . Wir wissen

$$x_{m(a; b)} \leq 2 \cdot 4^k a, \quad m(a; b) \leq (4^{k+1}a)^4.$$

Für  $a \geq 1$  und damit  $\alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}$  ist

$$\frac{a^{-2}}{\alpha_0} = \frac{\tan \alpha_0}{\alpha_0} \leq \frac{\tan \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi},$$

$$k < 4 + 4a^2 \leq 8a^2$$

$$x_{m(a; b)} < 4^{9a^2}, \quad m(a; b) < 4^{36a^2},$$

zusammen mit Beispiel 1 und Beispiel 2 gilt das schon für  $a > 0$ . Die beiden letzten Abschätzungen haben also die Gestalt  $C^{a^2}$ , wobei wir bei  $C$  großzügig gewesen sind.

Nach Beispiel 2 ist  $m(1; 2) = 3$ .

### Zusammenfassung.

In [1] wurde  $m(a; b) < \infty$  gezeigt; wir haben hier  $m(a; b)$  durch  $a$  allein nach oben abgeschätzt.

Mit  $a$  kann  $m(a; b)$  beliebig groß werden. Dazu sei

$$m \in \mathbb{N}, \quad a \geq 2 \sqrt{\frac{1+2m}{\pi}}, \quad b = 2a;$$

dann ist

$$\vartheta_0 = \alpha_0 \leq \tan \alpha_0 = a^{-2},$$

$$\vartheta_m = \vartheta_0 + 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) \leq (1 + 2m)\alpha_0 \leq \frac{\pi}{4};$$

für ein so kleines  $\vartheta_m$  geht das Verfahren offensichtlich noch weiter.

**Anhang 1**

Es sei  $m(a) := m(a; 2a)$ ,  $s(a) := x_{m(a)}(a; 2a)$ ; Herr Dr. Viergutz hat folgende Tabellen für  $s(a)$  (gerundet) und  $m(a)$  angefertigt:

$a$	$m(a)$	$s(a)$
1	3	3
2	110	17
3	1199	55
4	6678	130
5	25415	254
6	75828	439
7	191131	698
8	425804	1041
9	863152	1483
10	1624056	2034
11	2877020	2707
12	4874362	3531

Statt  $C^{a^2}$  lassen diese Tabellen  $C^a$  oder noch bessere obere Abschätzungen erwarten. Ferner fällt auf

$$\frac{m(a+1)}{m(a)} \approx \frac{s(a+1)^2}{s(a)} ; \quad \frac{s(a)^2}{s(a-1)s(a+1)}$$

fällt vielleicht monoton gegen 1.

**Anhang 2**

Wir möchten jetzt Billard spielen mit Lichtstrahlen mittels Spiegelungen an der Hyperbel  $y = h(x) := \frac{1}{x}$  und an der von ihren Asymptoten verschiedenen Gerade  $y = 1$ . Es wird sich zeigen, daß im Gegensatz zu oben der Lichtstrahl bei passender Vorgabe (vgl. (1') unten) ins Unendliche entweicht. Beim Beweis werden diese Spiegelungen mit „Fastspiegelungen“ an den Geraden  $y = 0$  und  $y = 1$  verglichen. Es wird sich zeigen, daß die Spiegelungen den Fastspiegelungen voraus eilen.

Wir beginnen mit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ,

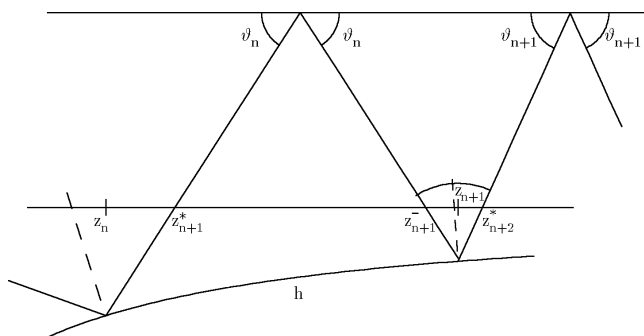
$$(1') \quad x_0 \geq 4, \quad 0 < \lambda_0 \leq \frac{\pi}{6};$$

dann ist

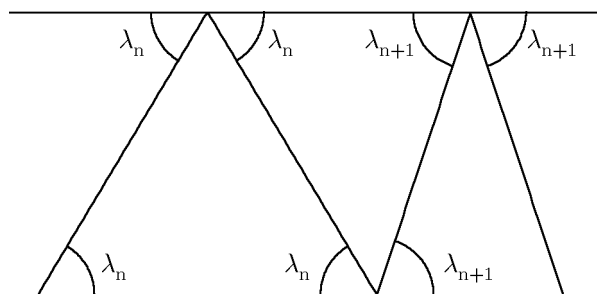
$$\frac{2}{x_0} + \lambda_0 < \frac{\pi}{3}.$$

## Hyperbelbillard

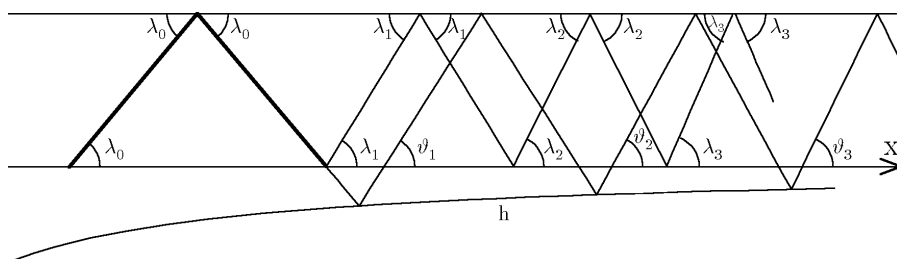
151



Figur 8. Spiegelung



Figur 9. Fastspiegelung



Figur 10. Spiegelung und Fastspiegelung

Wir behandeln zuerst die Fastspiegelungen. Es ist

$$\alpha < \tan \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}), \quad \sum_{j=1}^{\infty} (x_0 + j)^{-2} < \frac{1}{x_0}.$$

Zu  $x_0, \lambda_0$  konstruieren wir jetzt  $x_n, \beta_n, \lambda_n$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  gemäß

$$x_n := x_{n-1} + \frac{2}{\tan \lambda_{n-1}} > x_{n-1} + 1 > x_0 + n,$$

$$0 < \beta_n < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \beta_n := x_n^{-2} < (x_0 + n)^{-2},$$

$$\lambda_n := \lambda_{n-1} + 2\beta_n \quad (\text{Fastspiegelung})$$

$$= \lambda_0 + 2(\beta_1 + \dots + \beta_n) < \lambda_0 + 2 \sum_{j=1}^n (x_0 + j)^{-2} < \lambda_0 + \frac{2}{x_0} < \frac{\pi}{3},$$

$$0 < \tan \lambda_n < \sqrt{3} < 2.$$

Wir behandeln jetzt auch noch die Spiegelungen und konstruieren zunächst  $z_1, \alpha_1, \vartheta_1$  und dann auch noch  $z_n^*, z_n^-, z_n, \alpha_n, \vartheta_n$  für  $n = 2, 3, 4, \dots$  gemäß

$z_1$  definiert durch Figuren 8 und 10

$$0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha_1 := z_1^{-2},$$

$$\vartheta_1 := \lambda_0 + 2\alpha_1 \quad (\text{Spiegelung}),$$

$$x_1 < z_1, \quad \alpha_1 < \beta_1, \quad \vartheta_1 < \lambda_1$$

und

$z_n^*, z_n^-, z_n$  definiert durch Figur 8,

$$0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha_n := z_n^{-2},$$

$$\vartheta_n := \vartheta_{n-1} + 2\alpha_n \quad (\text{Spiegelung})$$

$$= \lambda_0 + 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n),$$

$$z_{n-1} < z_n^* < z_n^- < z_n,$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2}{\tan \lambda_{n-1}} < \frac{2}{\tan \vartheta_{n-1}} = z_n^- - z_n^* < z_n - z_{n-1},$$

$$x_n < z_n - (z_{n-1} - x_{n-1}) < z_n, \quad \alpha_n < \beta_n,$$

$$\vartheta_n = \lambda_0 + 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) < \lambda_0 + 2(\beta_1 + \dots + \beta_n) = \lambda_n.$$

Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  ist also

$$0 < \vartheta_n < \lambda_n < \frac{\pi}{3}, x_0 + n < x_n < z_n;$$

damit ist alles gezeigt.

### Literatur

[1] J. L. KING, Billiards Inside a Cusp, The Mathematical Intelligencer 17 (1995), 8-16.