

Das elektromagnetische Feld innerhalb und außerhalb einer leitenden Kugel bei zeitabhängigem äußerem Magnetfeld

Seebaß, Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 19, 1967,
S. 84-95



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Das elektromagnetische Feld innerhalb und außerhalb einer leitenden Kugel bei zeitabhängigem äußeren Magnetfeld

Von Joachim Seebaß

Vorgelegt von G. Lautz

(Eingegangen am 25. 9. 1966)

Übersicht: In der vorliegenden Arbeit wird das elektromagnetische Feld in einer Kugel aus elektrisch leitendem Material untersucht, die sich in einem äußeren, ursprünglich räumlich homogenen, zeitlich veränderlichen Magnetfeld befindet. Für den Fall rein sinusförmiger Zeitabhängigkeit werden die elektromagnetischen Feldkomponenten exakt berechnet und z. T. diskutiert. Weiterhin wird ein exakter Ausdruck für den zeitlichen Mittelwert der in der Kugel durch Wirbelströme erzeugten Jouleschen Wärme angegeben. Für den Fall zeitlich gepulster äußerer Magnetfelder lassen sich für die elektromagnetischen Feldkomponenten und für die Joulesche Wärme nur Integralformeln (Fourier-Integrale) angeben, die nur mit Hilfe einer Rechenanlage ausgewertet werden können. Für einen speziellen Fall (einmaliger Rechteck-Impuls) läßt sich die Integration zur Berechnung der Jouleschen Wärme exakt durchführen. Dabei ergibt sich eine rasch konvergierende Reihe.

Summary: This paper deals with the electromagnetic field within a conducting sphere, caused by a magnetic field outside, which is time-dependent but originally homogeneous in space. In the case of sinusoidal time-dependence of the outer field, exact formulae are given for the electromagnetic field and for the Joulean heat. In the case of the outer field in form of single, arbitrarily shaped pulses we can give the electromagnetic fields and the Joulean heat only in terms of Fourier-integrals that can be evaluated only by a digital computer. Only in the case of a single square pulse a straight forward calculation of the Joulean heat results in an exact formula.

1. Einleitung

Messungen der magnetischen Widerstandsänderung und des Hall-Effektes bei sehr starken Magnetfeldern werden im allgemeinen im Impulsbetrieb durchgeführt. Die damit verbundenen hohen Frequenzen führen zum Auftreten von Skin-Effekt und Wirbelströmen innerhalb der Meßproben. Für eine Interpretation der Meßergebnisse ist daher eine genaue Kenntnis des Einflusses dieser Effekte erforderlich. Zwei Fragen treten insbesondere auf, deren Beantwortung von Wichtigkeit ist:

1. Wie weit dringt das Magnetfeld während des Impulses in die Meßprobe ein?
2. Wie groß ist die Joulesche Wärme, die von den in der Probe induzierten Wirbelströmen erzeugt wird?

In der vorliegenden Arbeit wird das elektromagnetische Feld innerhalb und außerhalb einer Kugel aus leitendem Material untersucht, die sich in einem äußeren, ursprünglich homogenen, zeitlich gepulsten Magnetfeld befindet. Dabei ergeben sich exakte analytische Ausdrücke für den Verlauf der Feldstärken und für die durch Wirbelströme entwickelte Joulesche Wärme. Diese Ausdrücke lassen sich aber nur für zeitlich rein sinusförmig verlaufende Felder

mit bescheidenen Mitteln numerisch auswerten und diskutierten. Die Auswertung für beliebig gepulste äußere Magnetfelder läßt sich nur mit Hilfe einer elektronischen Rechananlage durchführen.

2. Allgemeines

Wir betrachten eine Kugel vom Radius a mit der spez. elektrischen Leitfähigkeit σ . Hinsichtlich der magnetischen Permeabilität beschränken wir uns auf den Fall $\mu_r = 1$. (Der allgemeine Fall $\mu_r \neq 1$ läßt sich ebenfalls mathematisch exakt behandeln.)

Das äußere, zeitabhängige, ursprünglich räumlich homogene Magnetfeld sei parallel zur z -Achse gerichtet. Dann existieren — in räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ — nur die folgenden Feldkomponenten:

Innerhalb der Kugel

$$E_{\varphi}^{(i)}, J_{\varphi} = \sigma E_{\varphi}^{(i)}, H_r^{(i)}, H_{\vartheta}^{(i)}$$

außerhalb der Kugel

$$E_r^{(a)}, H_r^{(a)}, H_{\vartheta}^{(a)}.$$

Ausgangspunkt der Rechnung sind die Maxwellschen Gleichungen für quasi-stationäre Felder

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}^{(i)} = \mathfrak{J} \quad (2a) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H}^{(a)} = 0 \quad (2b)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad (4)$$

sowie die Materialgleichungen

$$\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}^{(i)} \quad (5) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}. \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (1), (2a), (3), (5) und (6) erhält man in bekannter Weise für die elektrische Feldstärke innerhalb der Kugel die Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathfrak{E}^{(i)}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathfrak{E}^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

und aus den Gleichungen (1), (2b), (3) und (6) erhält man für die elektrische Feldstärke außerhalb der Kugel

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathfrak{E}^{(a)}) = 0. \quad (8)$$

Im folgenden werden zunächst die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (7) und (8) berechnet. Aus diesen Lösungen bestimmen wir mittels der Maxwellschen Gleichungen die zugehörigen Komponenten der magnetischen Feldstärke. Aus dem so erhaltenen, noch sehr allgemeinen Lösungssystem der Maxwellschen Gleichungen, sondern wir die speziellen Lösungen für unser Problem durch die folgenden Randbedingungen aus:

1. In sehr großem Abstand von der Kugel soll sich das Magnetfeld wie ein zeitabhängiges, aber räumlich homogenes Magnetfeld in z -Richtung verhalten.
2. An der Kugeloberfläche müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke stetig sein.

Durch diese Randbedingungen werden die Lösungen unseres Problems eindeutig bestimmt.

Die Berechnung der durch Wirbelströme in der Kugel erzeugten Jouleschen Wärme geschieht durch Integration der Radialkomponente des Poynting-Vektors (bzw. ihres zeitlichen Mittelwertes) über die Kugeloberfläche.

3. Der Feldverlauf bei rein sinusförmiger Zeitabhängigkeit

Für den Fall rein sinusförmiger Zeitabhängigkeit der Feldstärken setzen wir an

$$\mathfrak{E} = \operatorname{Re} \{ \check{\mathfrak{E}} e^{j\omega t} \} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = \operatorname{Re} \{ \check{\mathfrak{H}} e^{j\omega t} \}.$$

Damit ergibt sich aus Gl. (7) die folgende Differentialgleichung für den Phasor $\check{E}_\varphi^{(i)}$ der φ -Komponente der elektrischen Feldstärke innerhalb der Kugel:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \check{E}_\varphi^{(i)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \check{E}_\varphi^{(i)}}{\partial \vartheta} \right) - \left[j\omega \mu_0 \sigma + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right] \check{E}_\varphi^{(i)} = 0. \quad (9)$$

Durch einen Separationsansatz erhält man als allgemeine Lösung von (9)

$$E_\varphi^{(i)} = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{1}{\sqrt{\varrho}} I_{l+1/2}(\varrho) P_l^1(\cos \vartheta). \quad (10)$$

Hier ist

$$\varrho = \sqrt{j\omega \mu_0 \sigma} \cdot r, \quad (11)$$

$I_{l+1/2}(\varrho)$ ist die modifizierte Besselfunktion erster Art von halbzahlgiger Ordnung und $P_l^1(\cos \vartheta)$ ist die zugeordnete Kugelfunktion 1. Grades und l -ter Ordnung. Die Konstanten A_l sind aus den Randbedingungen zu bestimmen. (10) enthält nur den Anteil der allgemeinen Lösung von (9), der für $r = 0$ sowie für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ nicht singularär wird.

Für den Phasor $\check{E}_\varphi^{(a)}$ der φ -Komponente der elektrischen Feldstärke außerhalb der Kugel ergibt sich aus (8) die Differentialgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \check{E}_\varphi^{(a)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \check{E}_\varphi^{(a)}}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \check{E}_\varphi^{(a)} = 0 \quad (12)$$

mit der Lösung

$$\check{E}_\varphi^{(a)} = \sum_{l=1}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l^1(\cos \vartheta). \quad (13)$$

(13) enthält wieder nur den Anteil der allgemeinen Lösung von (12), der für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ nicht singularär wird. Die B_l und C_l sind durch die Randbedingungen zu ermitteln.

Mittels der Gleichungen

$$\check{H}_r = - \frac{1}{j\omega \mu_0} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \check{E}_\varphi) \quad (14)$$

und

$$\check{H}_\vartheta = \frac{1}{j\omega \mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \check{E}_\varphi) \quad (15)$$

kann man nun aus (10) bzw. (13) die Phasoren der Komponenten der magnetischen Feldstärke innerhalb bzw. außerhalb der Kugel berechnen. Für das äußere, erregende Magnetfeld setzen wir an

$$H_z = \operatorname{Re} \{H_0 e^{j\omega t}\}, H_0 \text{ reell.}$$

Die in Nr. 2 genannten Randbedingungen führen dann zur Bestimmung der Konstanten. Man erhält

$$A_1 = \frac{3}{2} j \omega \mu_0 H_0 a \frac{\sqrt{\varrho a}}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)}, \quad (16)$$

$$B_1 = \frac{1}{2} j \omega \mu_0 H_0, \quad (17)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} j \omega \mu_0 H_0 a^3 \cdot \frac{3 I_{3/2}(\varrho a) - \varrho a I_{1/2}(\varrho a)}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)}. \quad (18)$$

Alle anderen Koeffizienten sind gleich Null. In den Gleichungen (16) bis (18) wurde zur Abkürzung die Größe $\varrho a = \sqrt{j \omega \mu_0 \sigma} \cdot a$ eingeführt. Damit lauten die Phasoren für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke:

$$\check{E}_\varphi^{(i)} = -\frac{3}{2} j \omega \mu_0 H_0 a \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{I_{3/2}(\varrho)}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)} \sin \vartheta. \quad (19)$$

$$\check{H}_r^{(i)} = 3 H_0 \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^3} \frac{I_{3/2}(\varrho)}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)} \cos \vartheta. \quad (20)$$

$$\check{H}_\vartheta^{(i)} = -\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^3} \frac{\varrho I_{1/2}(\varrho) - I_{3/2}(\varrho)}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)} \sin \vartheta. \quad (21)$$

$$\check{E}_\varphi^{(a)} = -\frac{1}{2} j \omega \mu_0 H_0 a \left[\frac{r}{a} + \frac{3 I_{3/2}(\varrho a) - \varrho a I_{1/2}(\varrho a)}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)} \frac{a^2}{r^2} \right] \sin \vartheta. \quad (22)$$

$$\check{H}_r^{(a)} = H_0 \left[1 + \frac{3 I_{3/2}(\varrho a) - \varrho a I_{1/2}(\varrho a)}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)} \frac{a^3}{r^3} \right] \cos \vartheta. \quad (23)$$

$$\check{H}_\vartheta^{(a)} = -H_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{3 I_{3/2}(\varrho a) - \varrho a I_{1/2}(\varrho a)}{\varrho a I_{1/2}(\varrho a)} \frac{a^3}{r^3} \right] \sin \vartheta. \quad (24)$$

Zur numerischen Auswertung der Formeln (19) bis (24) benutzt man am besten die folgenden Darstellungen der modifizierten Besselfunktionen erster Art:

$$I_{1/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi z}} \sinh(z) \quad (25)$$

und

$$I_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi z}} \left[\cosh(z) - \frac{\sinh(z)}{z} \right]. \quad (26)$$

Weiterhin ist es zweckmäßig, die Skineindringtiefe

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad (27)$$

einzuführen. Damit erhält man

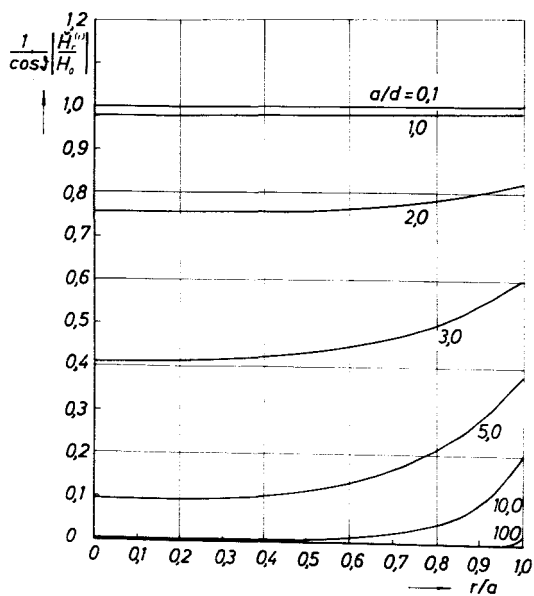


Abb. 1. $\frac{1}{\cos \vartheta} \left| \frac{\tilde{H}_r^{(i)}}{H_0} \right|$ als Funktion der Ortes; Parameter ist das Verhältnis a/d

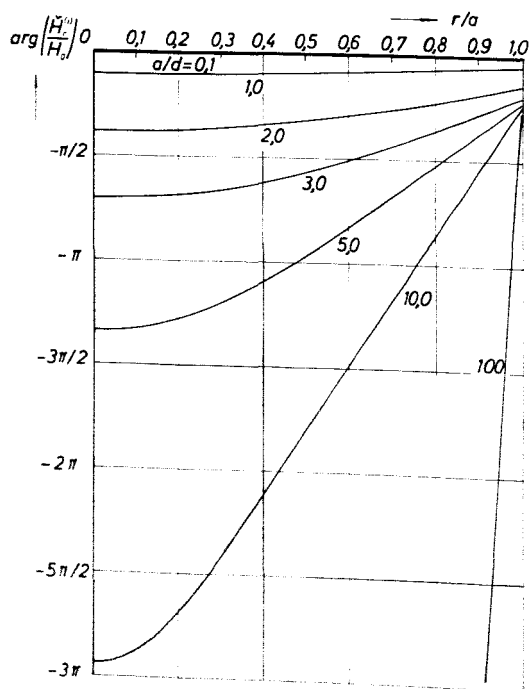


Abb. 2. $\arg \left(\frac{\tilde{H}_r^{(i)}}{H_0} \right)$ als Funktion des Ortes; Parameter ist das Verhältnis a/d

$$\varrho = (1 + j) \frac{r}{d} \quad (28) \quad \text{und} \quad \varrho_a = (1 + j) \frac{a}{d} \quad (29)$$

und kann dann die Phasoren leicht in Real- und Imaginärteil bzw. in Betrag und Phase zerlegen. Diese Größen hängen dann von der Variablen r/a ab mit dem Verhältnis a/d , das ein Maß für die Stärke des Skin-Effektes ist, als Parameter [1]. In Abb. 1 und Abb. 2 sind Betrag und Phase der magnetischen Feldgröße

$$\frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\check{H}_r^{(i)}}{H_0}$$

und in Abb. 3 und Abb. 4 sind Betrag und Phase der magnetischen Feldgröße

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\check{H}_\vartheta^{(i)}}{H_0}$$

als Funktion von r/a mit dem Verhältnis a/d als Parameter dargestellt. (Abb. 1 und Abb. 2 stellen gleichzeitig Betrag und Phase der z -Komponente des Magnetfeldes innerhalb der Kugel auf der Achse, und Abb. 3 und Abb. 4 den Betrag

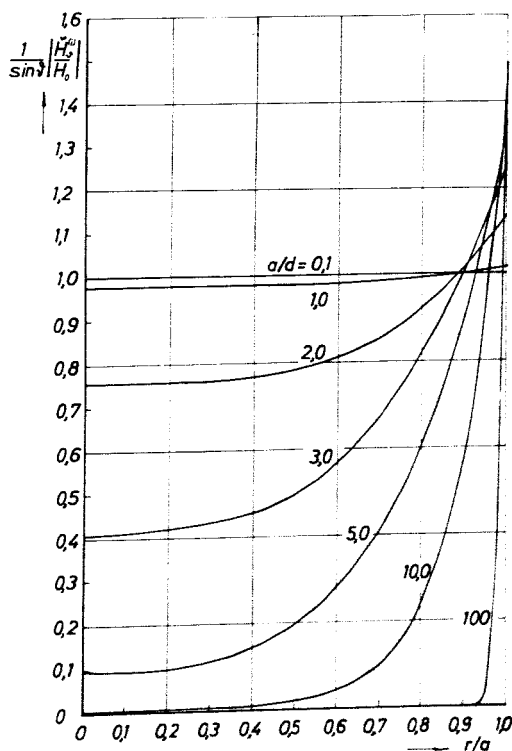


Abb. 3. $\frac{1}{\sin \vartheta} \left| \frac{\check{H}_\vartheta^{(i)}}{H_0} \right|$ als Funktion des Ortes; Parameter ist das Verhältnis a/d

und die — um π verschobene — Phase der z -Komponente des Magnetfeldes innerhalb der Kugel in der Äquatorebene dar.) An diesen Kurven ist die Wirkung des Skin-Effektes deutlich zu erkennen. Mit wachsendem Verhältnis a/d dringt das Magnetfeld immer weniger in die Kugel ein und existiert schließlich nur noch in einer dünnen Oberflächenschicht. Das Kugellinnere ist dann quasi feldfrei.

4. Berechnung der Jouleschen Wärme bei zeitlich rein sinusförmigem Feldverlauf

Im zeitlich rein periodischen Fall interessiert uns der zeitliche Mittelwert der pro Zeiteinheit in der Kugel durch die Wirbelströme erzeugten Jouleschen Wärme. Man berechnet ihn am einfachsten über den Fluß des zeitlich gemittelten Poynting-Vektors durch die Kugeloberfläche. In unserem Fall ist der zeitliche Mittelwert der Radialkomponente des Poynting-Vektors gegeben durch

$$\bar{S}_r = -\frac{1}{4} [\check{E}_\varphi \check{H}_\theta^* + \check{E}_z^* \check{H}_\varphi] \quad (30)$$

(* bedeutet: konjugiert komplexe Größe.)

Mit (19) und (21) erhält man

$$\bar{S}_r(r=a) = -\frac{9}{8} \mu_0 H_0^2 a \omega \frac{\text{Im} \{ Q_a I_{1/2}(Q_a) I_{3/2}(Q_a^*) \}}{|Q_a I_{1/2}(Q_a)|^2} \sin^2 \vartheta. \quad (31)$$

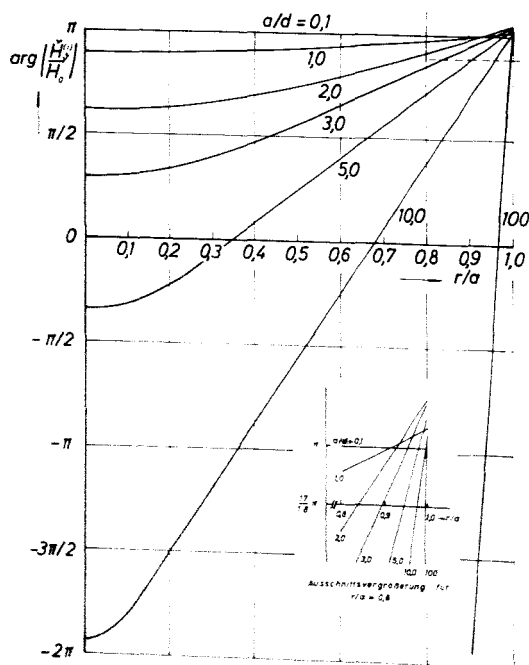


Abb. 4. $\arg \left(\frac{\check{H}_\varphi^{(1)}}{H_0} \right)$ als Funktion des Ortes; Parameter ist das Verhältnis a/d

Durch Integration über die Kugeloberfläche ergibt sich dann der zeitliche Mittelwert der Jouleschen Wärme pro Zeiteinheit

$$\bar{W}_J = 3 \pi \mu_0 H_0^2 a^3 \omega \frac{\operatorname{Im} \{ \varrho_a I_{1/2}(\varrho a) I_{3/2}(\varrho a^*) \}}{|\varrho_a I_{1/2}(\varrho a)|^2}. \quad (32)$$

Die Auswertung dieser Formel geschieht wieder mit Hilfe der Formeln (25) bis (29). Man erhält

$$\bar{W}_J = \frac{a H_0^2}{\sigma} W \left(\frac{a}{d} \right) \quad (33)$$

mit

$$W(x) = 3 \pi \left[x \frac{\sinh(2x) + \sin(2x)}{\cosh(2x) - \cos(2x)} - 1 \right]. \quad (34)$$

Für den Grenzfall schwachen Skin-Effektes, d. h. für $a/d < 1$ erhält man durch Reihenentwicklung

$$W \left(\frac{a}{d} \right) \approx \frac{4\pi}{15} \left(\frac{a}{d} \right)^4, \quad (35)$$

d. h.

$$\bar{W}_J \approx \frac{\pi}{15} \mu_0^2 H_0^2 a^5 \sigma \omega^2 \left(\frac{a}{d} \right)^4. \quad (36)$$

Für den Grenzfall starken Skin-Effektes, d. h. für $a/d \geq 4$ ergibt sich in sehr guter Näherung

$$W \left(\frac{a}{d} \right) \approx 3 \pi \left[\frac{a}{d} - 1 \right], \quad (37)$$

d. h.

$$\bar{W}_J \approx 3 \pi \frac{a H_0^2}{\sigma} \left[a \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} - 1 \right]. \quad (38)$$

In Abb. 5 ist der Verlauf von $W(x)$ für den Bereich $0,5 \leq x \leq 20$ dargestellt.

5. Der Feldverlauf bei beliebig gepulstem äußerem Magnetfeld

Für den Fall eines zeitlich beliebig gepulsten äußeren Magnetfeldes stellen wir die Feldgrößen durch Fourier-Integrale dar:

$$\mathfrak{E}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}(r, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (39)$$

$$\mathfrak{H}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}(r, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (40)$$

¹⁾ Diese Darstellung ist gültig für $0 \leq a/d \leq 0,5$. Bei $a/d = 0,5$ beträgt der Fehler erst $+2,49/100$.

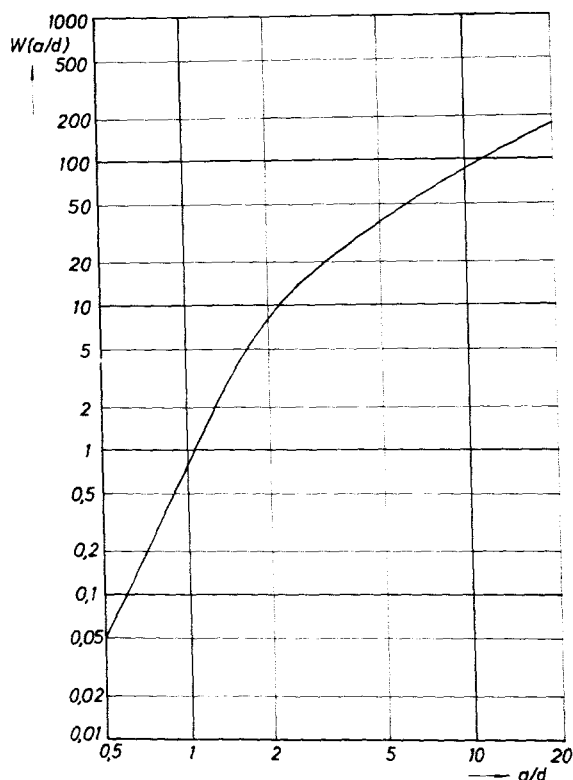


Abb. 5. Verlauf der Funktion $W(a/d)$ für den Wertebereich $0,5 \leq a/d \leq 20$

Mit diesem Ansatz erhält man aus Gl. (7) bzw. (8) für die Fourier-Transformierten $E_{\varphi}^{(i)}(r, \omega)$ bzw. $E_{\varphi}^{(a)}(r, \omega)$ genau die Differentialgleichungen (9) bzw. (12). Man kann deren Lösungen sofort übernehmen und muß nur jeweils die Größe H_0 durch $H_0(\omega)$ ersetzen, wobei

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) e^{-j\omega t} dt \quad (41)$$

die Fourier-Transformierte des äußeren, räumlich homogenen, zeitlich gepulsten Magnetfeldes ist.

Die Rücktransformation der so modifizierten Formeln (19) bis (24) läßt sich analytisch nicht durchführen, da der Integrand in zu komplizierter Weise von der Kreisfrequenz ω abhängt.

6. Die Berechnung der Jouleschen Wärme bei gepulstem Magnetfeld

Die in der Kugel durch Wirbelströme erzeugte Joulesche Wärme erfassen wir wieder durch eine Berechnung der in die Kugel eingestrahlt Energie. Es wird also

$$W_J = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \oint S_r df = - \oint df \int_{-\infty}^{+\infty} S_r dt. \quad (42)$$

In unserem Fall ist

$$S_r = - E_\varphi H_\vartheta. \quad (43)$$

Setzt man für E_φ und H_ϑ die entsprechenden Fourier-Integrale ein, so erhält man nach leichter Rechnung

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} S_r dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(r, \omega) H_\vartheta^*(r, \omega) d\omega. \quad (44)$$

An der Kugeloberfläche ist

$$E_\varphi(a, \omega) = - \frac{3}{2} j \mu_0 a \omega H_0(\omega) \frac{I_{3/2}(\varrho_a)}{\varrho_a I_{1/2}(\varrho_a)} \sin \vartheta \quad (45)$$

und

$$H_\vartheta(a, \omega) = - \frac{3}{2} H_0(\omega) \frac{\varrho_a I_{1/2}(\varrho_a) - I_{3/2}(\varrho_a)}{\varrho_a I_{1/2}(\varrho_a)} \sin \vartheta. \quad (46)$$

Wenn man diese Ausdrücke in (44) einsetzt und dann über die Kugeloberfläche integriert — s. Gl. (42) —, erhält man

$$W_J = 6 \pi \mu_0 a^3 j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_{3/2}(\varrho_a) \varrho_a^* I_{1/2}(\varrho_a^*) - |I_{3/2}(\varrho_a)|^2}{|\varrho_a I_{1/2}(\varrho_a)|^2} |H_0(\omega)|^2 \omega d\omega. \quad (47)$$

Nun gelten die Beziehungen

$$\varrho_a^*(-\omega) = \varrho_a(\omega) \text{ und } \varrho_a(-\omega) = \varrho_a^*(\omega). \quad (48)$$

Daraus folgt, daß der Nenner sowie der zweite Zählerterm des Integranden gerade Funktionen in ω sind. Da $|H_0(\omega)|^2$ ebenfalls gerade in ω ist, liefert der zweite Zählerterm überhaupt keinen Beitrag zum Integral und der Ausdruck für W_J vereinfacht sich zu

$$W_J = 6 \pi \mu_0 a^3 j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H_0(\omega)|^2 I_{3/2}(\varrho_a) \varrho_a^* I_{1/2}(\varrho_a^*)}{|\varrho_a I_{1/2}(\varrho_a)|^2} \omega d\omega. \quad (49)$$

Diesen Ausdruck kann man in ein Integral von $-\infty$ bis 0 und ein Integral von 0 bis $+\infty$ zerlegen. Führt man dann beim ersten Integral $-\omega$ als neue Integrationsvariable ein, so erhält man nach kurzer Umformung und unter Beachtung der Beziehungen (48)

$$W_J = 12 \pi \mu_0 a^3 \int_0^{\infty} \frac{|H_0(\omega)|^2 \operatorname{Im} \{ \varrho_a I_{1/2}(\varrho_a) I_{3/2}(\varrho_a^*) \}}{|\varrho_a I_{1/2}(\varrho_a)|^2} \omega d\omega. \quad (50)$$

Nun ist — s. Gln. (32) und (33) —

$$\frac{\omega \operatorname{Im} \{ \varrho_a I_{1/2}(\varrho_a) I_{3/2}(\varrho_a^*) \}}{|\varrho_a I_{1/2}(\varrho_a)|^2} = \frac{1}{3 \pi \mu_0 a^2 \sigma} W \left(\frac{a}{d} \right). \quad (51)$$

Wir führen eine neue dimensionslose Variable ξ ein durch die Beziehungen

$$\frac{a}{d} = \sqrt{\frac{a^2 \mu_0 \sigma}{2} \omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_s}} = \sqrt{\xi} \quad (52)$$

mit

$$\omega_s = \frac{2}{a^2 \mu_0 \sigma} \quad (53)$$

und erhalten dann für W_J

$$W_J = \frac{4 a \omega_s}{\sigma} \int_0^{\infty} |H_0(\omega_s \cdot \xi)|^2 W(\sqrt{\xi}) d\xi. \quad (54)$$

Eine Auswertung dieses Ausdruckes läßt sich in der Regel nicht ohne Benutzung einer Rechenanlage durchführen. Man wird den Arbeitsaufwand dadurch verringern, daß man im Bereich $0 \leq \xi \leq 0,25$ die Näherung (35), und im Bereich $\xi \geq 25$ die Näherung (37) benützt. In diesen Bereichen kann man die Integration unter Umständen direkt ausführen — das hängt von der Funktion $H_0(\omega)$ ab — und braucht dann nur noch das Integral von 0,25 bis 25 mit einem Rechner auszuwerten.

7. Die Joulesche Wärme für einen Rechteckimpuls

Wir betrachten jetzt den Fall, daß das äußere Magnetfeld die Form eines Rechteckimpulses der Höhe H_0 und der Dauer T ($-T/2 \leq t \leq T/2$) besitzt. Dem entspricht die Fourier-Transformierte

$$H_0(\omega) = \frac{2 H_0}{\sqrt{2} \pi} \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega}. \quad (55)$$

Für diesen Fall kann man nämlich die Integration über ξ in (54) direkt ausführen. Dazu nehmen wir eine Umformung vor. Mit Hilfe der Beziehung [2]

$$\frac{\sinh(x) + \sin(x)}{\cosh(x) - \cos(x)} = \frac{x^3}{2\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + \frac{x^4}{4\pi^4}} \quad (56)$$

erhalten wir für $W(\sqrt{\xi})$:

$$W(\sqrt{\xi}) = 6\pi \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \pi^4 + \xi^2}. \quad (57)$$

Nach Einsetzen von (55) und (57) in (54) und kurzer Umformung folgt:

$$W_J = \frac{24 a H_0^2}{\sigma \omega_s} \omega_s T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) dx}{\left(n^2 \pi^2 \frac{\omega_s T}{4}\right)^2 + x^2}.$$

Die Integration läßt sich ausführen [3] und ergibt

$$W_J = \frac{24 a H_0^2}{\sigma \omega_s} \omega_s T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2 \pi^2 \omega_s T} \left[1 - e^{-n^2 \pi^2 \omega_s \frac{T}{2}} \right] =$$

$$= \frac{24 a H_0^2}{\sigma \omega_s \pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \omega_s \frac{T}{2}}}{n^2} \right]. \quad (58)$$

Nun gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Damit, sowie unter Berücksichtigung von (53), erhalten wir

$$W_J = 2 \pi a^3 \mu_0 H_0^2 \left[1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \omega_s \frac{T}{2}}}{n^2} \right]. \quad (59)$$

Die Reihe in dieser Formel konvergiert für $\omega_s(T/2) > 0,2$ sehr schnell, so daß man in diesem Bereich nur zwei oder drei Glieder zu berücksichtigen braucht. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Größenordnung von ω_s für verschiedene Werte der elektrischen Leitfähigkeit σ . Dabei wurde ein Kugelradius $a = 5 \cdot 10^{-3}$ m zugrunde gelegt. Bei der höchsten hier in Betracht gezogenen Leitfähigkeit ist z. B. für eine Impulsdauer von $T \geq 3,15 \cdot 10^{-4}$ s die Bedingung $\omega_s(T/2) > 0,2$ erfüllt, so daß man also auch für diesen Fall mit wenigen Gliedern der Reihenentwicklung in (59) auskommt.

Tabelle 1: Werte der charakteristischen Kreisfrequenz ω_s für einige Leitfähigkeitswerte, jeweils für eine Kugel mit dem Radius $a = 5 \cdot 10^{-3}$ m

$\sigma [\Omega^{-1} m^{-1}]$	$5 \cdot 10^7$	10^6	10^4	10^2	10^0	10^{-2}	10^{-4}
$\omega_s [s^{-1}]$	$1,27 \cdot 10^3$	$6,37 \cdot 10^4$	$6,37 \cdot 10^6$	$6,37 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^{10}$	$6,37 \cdot 10^{12}$	$6,37 \cdot 10^{14}$

Schlußbemerkung

Die numerischen Berechnungen, die den in dieser Arbeit gezeigten Kurven zugrunde liegen, wurden von Herrn cand. el. R. Bergeest im Rahmen einer Studienarbeit durchgeführt.

Herrn Prof. Dr. G. Lautz danke ich für sein Interesse an der Arbeit sowie für die Durchsicht des Manuskriptes.

Literatur

- [1] R. Bergeest: Das elektromagnetische Feld in einer Kugel aus leitendem Material, die sich in einem äußeren, ursprünglich homogenen, zeitlich periodischen Magnetfeld befindet. (Studienarbeit, Braunschweig 1965.)
- [2] P. M. Morse and H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Vol. I. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London (1953).
- [3] I. M. Ryshik und I. S. Gradstein: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.