

Übersicht vom Verfasser
27.9.1930.

Sammlung

V. G. 885. 2. Ex.

Genauere Gelenkgeradföhrungen

Von

Friedrich Natalis

Mit 13 Bildern

Mitteilung aus der Archiv-Verwaltung der Siemens & Halske A.-G. und der
Siemens-Schuckertwerke A.-G. zu Siemensstadt

Eingegangen am 27. Mai 1930



Sonderdruck

aus

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern
IX. Band, 2. Heft

Verlag von Julius Springer, Berlin. 1930

(Nicht im Handel)

Printed in Germany

Die Entwicklung von Gelenkgeradföhungen hat zur Zeit der Entwicklung der Dampfmaschinen eine große Rolle gespielt, da die Herstellung genügend präziser prismatischer Geradföhungen werkstattechnisch damals noch nicht möglich war. Nachdem aber Hobel- und Fräsmaschinen zur Verfügung standen, sind sie aus dem schweren Maschinenbau mehr und mehr verschwunden.

Für feinmechanische Meßgeräte, wie Dampfindikatoreu, elektrische Meßgeräte mit gerader Skala und besonders für registrierende elektrische Meßgeräte sind sie aber noch heute in Anwendung, da bei diesen besonderer Wert auf geringe Reibungsverluste gelegt werden muß.

Unter den Gelenkgeradföhungen sind zu unterscheiden:

1. Angenäherte Geradföhungen und
2. genaue Geradföhungen.

Die ersteren sind durchweg entwickelt aus dem Gelenkviereck. Hält man eins der vier Glieder eines solchen Vierecks fest, so beschreibt ein beliebiger Punkt der gegenüberliegenden Koppel eine Kurve sechster Ordnung¹⁾. Durch geeignete Wahl der Gliedlängen und des Punktes der Koppelene kann man erreichen, daß ein Teil der Koppelkurve sich einer Geraden stark anschmiegt. Je nach dem Grade der Annäherung spricht man von einer 3-, 4-, 5- oder 6-punktigen Geradföhung, wenn die Tangente in einem bestimmten Punkt der Kurve 3...6 unendlich benachbarte Punkte mit dieser gemein hat.

Unter den angenäherten Geradföhungen mit 4 Gelenken²⁾ sind der Lemnisoidenlenker von Watt, der angenäherte Ellipsenlenker von Evans, der Robertsche Dreieckslenker und der Kreuzlenker von Tschebyscheff bekannt. Der Conchoidenlenker³⁾ scheidet in dieser Zusammenstellung aus, da eines seiner Gelenke eine Prismenführung ist.

An genauen Gelenkgeradföhungen, die allerdings eine größere Zahl von Gliedern (6 oder 8) erfordern, sind nur wenige bekannt. Der Ellipsenlenker⁴⁾ mit nur 4 Gliedern muß hier ausfallen, da er eine, wenn auch nur kurze, Hilfsgeradföhung durch Prismen

¹⁾ S. R. Müller: Z. f. Mathematik u. Physik. Leipzig 1897, S. 247 und 1898, S. 36.

²⁾ Siehe Lehrbuch der Kinematik von L. Burmester. Leipzig 1888, Fig. 649, 652, 657, 659.

³⁾ Ebenda, Fig. 663. ⁴⁾ Ebenda, Fig. 616.

erfordert. Die zuerst bekanntgewordenen genauen Gelenkgeradfürungen waren nach den Gesetzen der Inversion entwickelt, die dem Elektrotechniker aus der Vektorenrechnung geläufig sind:

In Bild 1 ist O das Inversionszentrum, durch das der Inversionskreis mit dem Radius r hindurchgeht. Senkrecht zu dem Kreisdurchmesser OR steht eine Gerade g im Abstand a von O . Auf einem beliebigen, von O ausgehenden Strahl OPQ werden die Strecken x bzw. y abgeschnitten, dann ist $\frac{x}{2r} = \frac{a}{y}$; $xy = 2ar = t^2$. Führt man daher den Punkt P auf einem Kreise und sorgt durch eine geeignete kinematische Verbindung dafür, daß

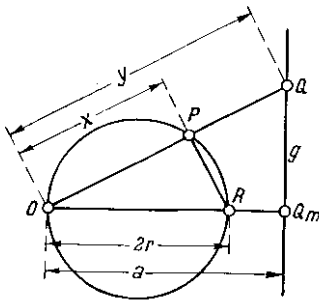


Bild 1.

$OQ = y = \frac{t^2}{x}$ wird, so wird der Punkt Q genau gerade geführt.

Eine solche Einrichtung (Bild 2) ist zuerst von Peaucellier¹⁾ angegeben. An die Endpunkte BC der beiden gleichlangen Schwingen $OB = OC = a$ ist ein Rhombus $BPCQ$ mit den gleichlangen Seiten b, b, b, b angelenkt, dann liegen die Punkte OPQ der völlig symmetrischen Figur immer auf einer Geraden und nach einem bekannten Satz

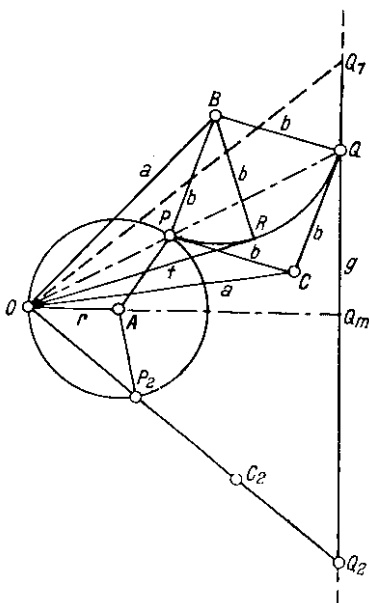


Bild 2.

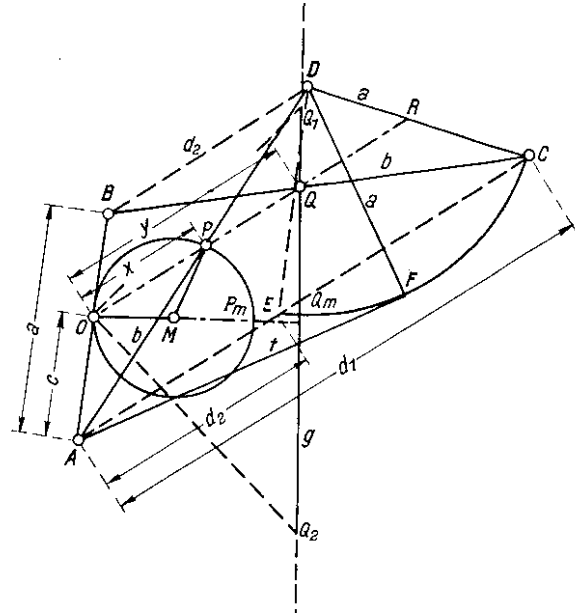


Bild 3.

der Geometrie ist $OP \cdot OQ = (OR)^2$, d. h. gleich dem Quadrat $t^2 = a^2 - b^2$ der Tangente t an den mit b um B beschriebenen Kreis. Wird daher P durch die Kurbel $AP = r (= OA)$ auf einem Kreise geführt, so bewegt sich Q auf der Geraden g , da $OQ = y = \frac{t^2}{OP} = \frac{t^2}{x}$ ist, wobei wieder OP mit x und OQ mit y bezeichnet sind.

Diese Geradföhrung erfordert 8 Glieder. Eine Geradföhrung mit nur 6 Gliedern (Bild 3), die gleichfalls auf den Grundsätzen der Inversion beruht, ist von Hart²⁾

¹⁾ Siehe Lehrbuch der Kinematik von L. Burmester. Leipzig 1888, Fig. 594.

²⁾ Ebenda, Fig. 587.

angegeben und wird als erste Hartsche Geradföhung bezeichnet. In dem Antiparallelogramm $ABCD$ mit den Seiten $AB = CD = a$ und $AD = BC = b$ und den parallelen Diagonalen $AC = d_1$ und $BD = d_2$ ist durch einen beliebigen Punkt O auf AB , der durch die Strecke $AO = c$ bestimmt ist, eine Parallele zu AC gezogen, die die Schnittpunkte $OPQR$ mit den Antiparallelogrammseiten bildet. Ferner ist um D mit a der Kreisbogen EFC beschrieben und die Tangente $AF = t$ konstruiert, dann ist $AE = BD = d_2$ und $AC \cdot AE = d_1 d_2 = t^2 = b^2 - a^2$. Daraus geht hervor, daß das Produkt $d_1 d_2$ der Diagonalen eine Konstante ist.

Ferner ist, wenn wir $OP = x$ und $OQ = y$ setzen,

$$\frac{x}{d_2} = \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{y}{d_1} = \frac{a-c}{a},$$

$$xy = d_1 d_2 \frac{c(a-c)}{a^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2} c(a-c) = k^2,$$

daher ist auch xy eine Konstante k^2 und $y = \frac{k^2}{x}$.

Benutzen wir daher den Punkt O als Festpunkt und föhren P durch die um M drehbare Kurbel MP auf einem durch O gehenden Kreise, so bewegt sich der Punkt Q auf der senkrecht zu OM stehenden Geraden g . Die in Bild 3 dargestellte Geradföhung hat im Vergleich mit der nach Bild 2 für die praktische Verwendung den Nachteil, daß ein Teil der erforderlichen Glieder die Gerade, auf der der Punkt Q geföhrt werden soll, überdecken.

Wählt man dagegen nach Bild 3a den Punkt O außerhalb der Strecke BC , so ist dieser Übelstand vermieden. Eine weitere Erläuterung erübrigt sich, da die beiden Bilder 3 und 3a ganz gleichartig bezeichnet sind. Da aber die Glieder a, b nicht unendlich lang ausgeföhrt werden können, so ist die Bewegung dadurch begrenzt, daß die Gelenkvierecke zu einer Geraden zusammenklappen, und daß der durch eine Kurbel geföhrt Punkt P nicht bis zu dem Inversionszentrum O ($x = 0$) fortschreiten kann. Ferner ist zu beachten, daß die Punkte P und Q in der Nähe ihrer Mittellage P_m, Q_m nahezu proportionale Geschwindigkeiten besitzen. Das

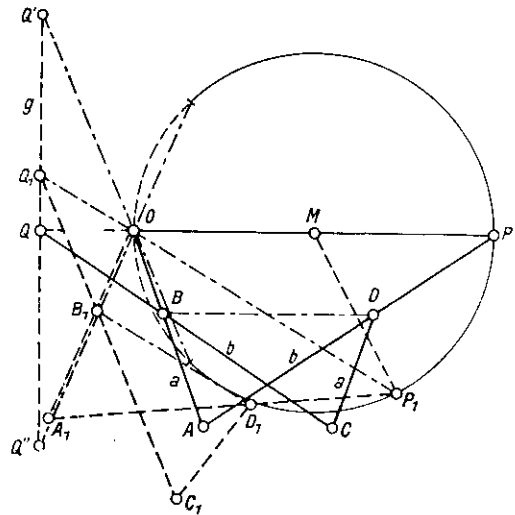


Bild 3a.

kann unter Umständen, z. B. bei der Anwendung für einen Indikator, dessen Ausschlag proportional dem Druck sein soll, von großem Wert sein, für andere Zwecke, z. B. für elektromagnetische oder Hitzdraht-Meßgeräte, kann dagegen ein veränderliches, etwa umgekehrt quadratisch fortschreitendes Übersetzungsverhältnis erwünscht sein.

Die nachstehend beschriebenen genauen Geradföhungen unterscheiden sich in diesen Punkten von den vorgehend beschriebenen „Inversoren“; sie bieten eine Geradföhung für endlich begrenzte Strecken und besitzen teilweise stark veränderliche Übersetzungen.

Diese Geradföhrungen sind aus gewissen übergeschlossenen Mechanismen entwickelt, auf die zuerst Hart¹⁾, Kempe²⁾ und Darboux³⁾ hingewiesen haben, und denen Burmester⁴⁾ wegen ihrer besonderen Eigenschaften den Namen Brennpunktsmechanismen gegeben hat. Weitere eingehende Untersuchungen über diese Mechanismen hat R. Müller⁵⁾ angestellt.

Werden auf den Seiten eines beliebigen Kurbelvierecks $UVWT$ (Bild 4) 4 Punkte $ABCD$ und im Innern desselben ein fünfter Punkt P so gewählt, daß die Vierecke $UAPB$ und $PCWD$ umgekehrt ähnlich sind und ebenso die Vierecke $TAPD$ und $PCVB$, so läßt sich nachweisen, daß dieser (durch 2 Glieder, z. B. PC und PD) übergeschlossene Mechanismus zwangläufig beweglich bleibt. Der Punkt P kann, um obengenannter Voraussetzung zu genügen, nicht beliebig gewählt werden, aber es gibt unendlich viele Punkte P , die alle auf einer noch zu bestimmenden Kurve (dritter Ordnung) liegen, die durch die Punkte $UVWT$ geht. Ferner gehören zu jedem Punkt P ganz bestimmte Anschlußpunkte $ABCD$. Wir wollen zunächst untersuchen, wie einer der Punkte P zu bestimmen ist. Die in dem Stammviereck $UVWT$

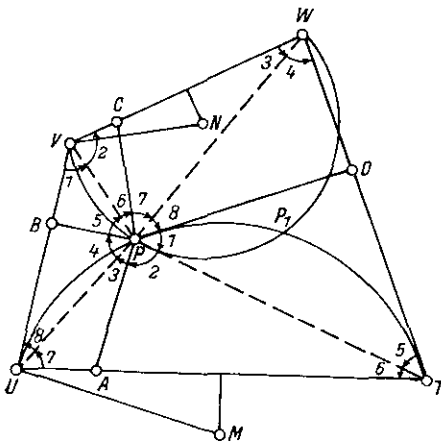


Bild 4.

liegenden 4 Fachvierecke $PDTA$, $PAUB$, $PBVC$ und $PCWD$ zerlegen wir durch die Strahlen PT , PU , PV , PW in je zwei Dreiecke und bezeichnen die Winkel bei P mit $1, 2, \dots, 8$, dann treten wegen der wechselseitigen Ähnlichkeit der Fachvierecke die gleichen Winkel $1, 2, \dots, 8$ an den Ecken $UVWT$ des Stammvierecks auf, und der Winkel $(2 + 3)$ bei P ergänzt sich mit dem Winkel $(6 + 7)$ bei P zu $2R$, da in dem Dreieck PVW sich die Winkel $(2 + 3)$ und $(6 + 7)$ zu $2R$ ergänzen. Ebenso ist $(4 + 5) + (8 + 1) = 2R$. Konstruiert man daher die beiden Kreise UPT mit dem beliebigen Peripheriewinkel $(2 + 3)$ und VPW mit dem Peripheriewinkel $(6 + 7) = 2R - (2 + 3)$,

so schneiden sie sich in 2 Punkten P und P_1 , die der genannten Bedingung entsprechen. Die Mittelpunkte M und N dieser beiden Kreise liegen gegenüber den zugehörigen Seiten des Stammvierecks so, daß $\sphericalangle TUM = \sphericalangle WVN$ ist. Burmester hat ferner nachgewiesen, daß je zwei zusammengehörige Punkte P und P_1 Brennpunkte einer dem Stammviereck einbeschriebenen Ellipse sind. Die Anschlußpunkte $ABCD$ der 4 von P ausgehenden Glieder PA , PB , PC , PD sind zu finden, indem man die Winkel $5, 6$ bei T im umgekehrten Drehsinn an den Strahl PV und ebenso die Winkel $1, 2$ bei V an den Strahl PT anträgt, woraus sich die Ähnlichkeit der Vierecke $TAPD$ und $PCVB$ ergibt. (In gleicher Weise können die nicht dargestellten Anschlußpunkte $A_1B_1C_1D_1$ für den Punkt P_1 konstruiert werden.)

Die Gesamtheit der innerhalb des Stammvierecks liegenden P -Punkte — die p -Kurve — wird daher gebildet durch die Schnittpunkte zweier ähnlichen, durch die Punkte UT bzw. VW gehenden Kreisscharen, deren gegeneinandergerichtete

¹⁾ H. Hart: Proc. of the London Mathematical Society 1877. Bd. 8, S. 288.

²⁾ A. Kempe: Proc. of the London Mathematical Society 1877, Bd. 9, S. 138.

³⁾ J. G. Darboux: Bull. des Sciences mathématiques et astronomiques 1879, 2ème sér. T. 3, S. 144.

⁴⁾ L. Burmester: Z. f. Mathematik u. Physik. Leipzig 1893, S. 193.

⁵⁾ R. Müller: Z. f. Mathematik u. Physik. Leipzig 1895, S. 257.

Bei den aus diesen Mechanismen zu entwickelnden Geradfürungen können diese Kurven einen Anhalt für die geeignete Wahl des gerade zu führenden Punktes bieten.

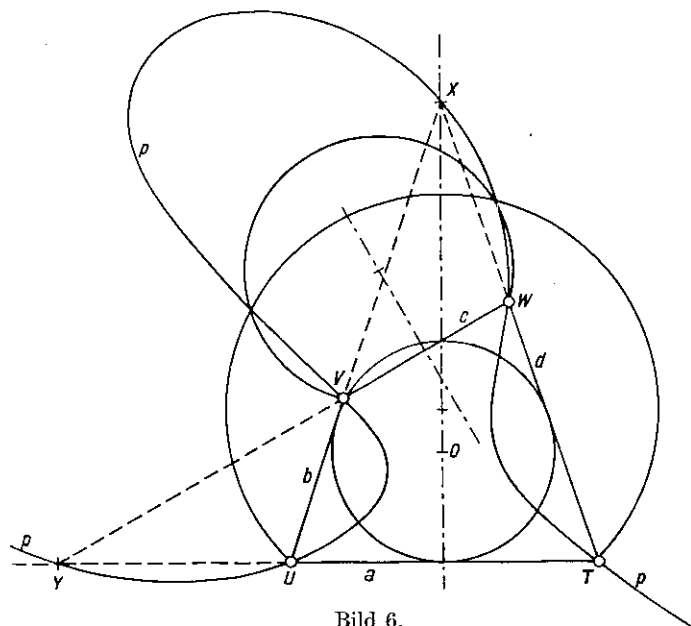


Bild 6.

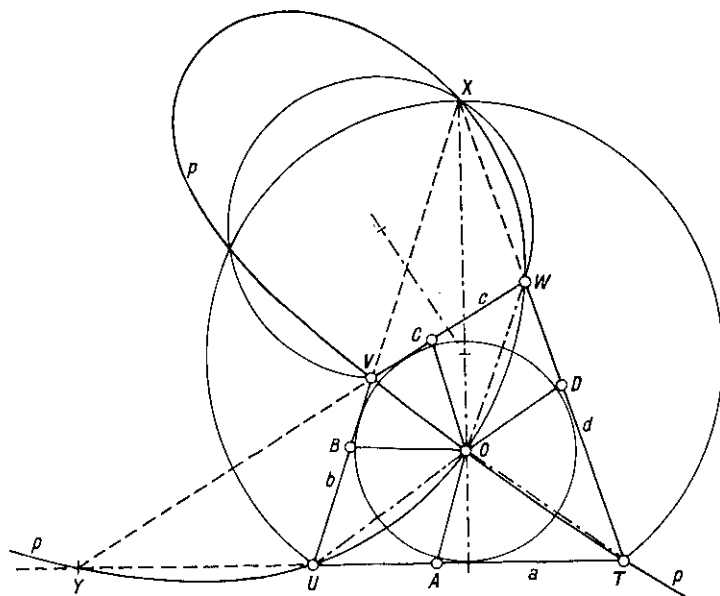


Bild 7.

ändert bleibt und da sie einen Winkel $(1' + 2')$ bzw. $(3' + 4')$ gemeinsam haben. Daher verbleiben auch die Endpunkte entsprechender Fachvierecke auf den Geraden $P'U$ bzw. $P'T$, und nach dem oben Gesagten ist

$$1' + 2' + 8' = 4R$$

$$\alpha' + \beta' = 6R - 4R = 2R.$$

und

Der Nachweis, daß der übergeschlossene Mechanismus $UVWT$ mit den Gliedern PA , PB , PC , PD zwangsläufig beweglich ist, kann nach Bild 8 folgendermaßen erbracht werden.

Wir trennen die untere Hälfte des in Bild 4 dargestellten Mechanismus ab und verlegen die spiegelbildlich umgekehrten Fachvierecke des oberen Teiles entsprechend Bild 8 in den unteren Teil, dann ist in diesem, wie oben nachgewiesen, die Summe der Winkel

$$1 + 2 + 3 + 4$$

$$+ 5 + 6 + 7 + 8 = 4R.$$

Diese Beziehung gilt ganz allgemein unter der Voraussetzung, daß die Fachvierecke wechselseitig ähnlich sind. Da ferner die Winkelsumme des Fünfeckes $UBPDT$ $6R$ beträgt, so ist

$$\alpha + \beta = 6R - 4R = 2R.$$

Bringen wir nun das Fünfeck etwa durch Verdrehung des Gliedes AP in eine andere Lage AP' , wobei die Winkel $1, 2, \dots, 8$ sich in $1', 2', \dots, 8'$ verwandeln, so bleiben die übereinandergelegten Fachvierecke ähnlich, da das Verhältnis entsprechender Seiten unverändert bleibt

in dieser Lage als ein symmetrisches Trapez darstellt. In gleicher Weise wie bei Bild 5, 6, 7 sind hier 3 Fälle zu unterscheiden, je nachdem in

Bild 9: $a + c < 2b$,

Bild 10: $a + c > 2b$,

Bild 11: $a + c = 2b$

gewählt wird. Im letzteren Falle läßt sich in das Stammviereck ein Kreis einbeschreiben und das Viereck wird ein einseitig durchschlagendes¹⁾.

Aus der Konstruktion des Punktes P in Bild 5 ergibt sich für den Fall der Geradföhrung die Beziehung

$$\sphericalangle APT = \sphericalangle YVP.$$

Analog müssen wir in Bild 9, wo A und Y in die Unendlichkeit rücken,

oder $\sphericalangle A_\infty PT = \sphericalangle Y_\infty VP$
 $\sphericalangle UTP = \sphericalangle WVP$ (1)

machen. Dieser Bedingung entspricht der mit X zusammenfallende Punkt P . Es gibt zwar noch unendlich viele auf einem durch P und V gehenden Kegelschnitt liegende Punkte, die diese Bedingung erfüllen. Da aber der Punkt P andererseits auch auf der p -Kurve (vgl. Bild 5) liegen muß, so kommt für eine Geradföhrung nur der mit X zusammenfallende Punkt P in Frage. Außer dem auf UT liegenden Punkt A_∞ fällt auch der auf VW liegende Punkt C_∞ ins Unendliche, denn es ist

$$\sphericalangle C_\infty PV = \sphericalangle A_\infty TP.$$

Der Punkt P wird daher einerseits auf einer Senkrechten zu UT gerade geföhrt, andererseits verbleibt er während seiner Bewegung auf der Mittensenkrechten zu VW , und umgekehrt, wenn statt der Seite UT die Seite VW des Vierecks festgehalten wird. Für die Ermittlung des Punktes B (bzw. D) versagt aber die früher angegebene Konstruktion, da sie darauf hinauskommen würde, den Schnittpunkt zweier zusammenfallender Geraden zu bestimmen. Man muß daher eine zweite Lage des Kurbelvierecks $UVWT$ zu Hilfe nehmen. Bringen wir dieses sowie das angelenkte Knie BPD in Bild 9 z. B. in die Lage UV_0W_0T bzw. $B_0P_0D_0$, so ist

$$P_0V_0 = P_0B_0 - B_0V_0 = PB - BV = b_2 - b_1 \quad \text{und} \quad PV = PB + BV = b_2 + b_1,$$

woraus sich ergibt

$$PB = b_2 = \frac{1}{2}(PV + P_0V_0),$$

$$BV = b_1 = \frac{1}{2}(PV - P_0V_0).$$

Macht man daher $PE = P_0V_0$, so liegt B in der Mitte von VE . Damit ist auch der symmetrisch liegende Punkt D bestimmt.

¹⁾ Ein zweiseitig durchschlagendes Kurbelviereck erhält man, wenn 2 Paar benachbarte Seiten gleich sind, z. B. $a = b$ und $c = d$. In einem solchen Falle stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

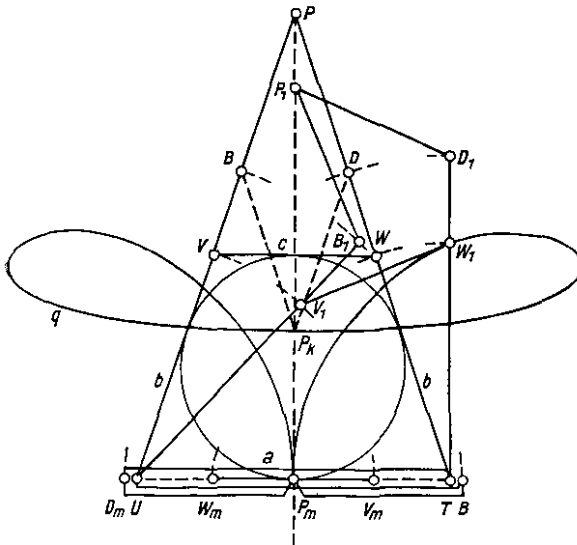


Bild 11.

Die von dem Punkt P beschriebene Kurve¹⁾, die als „Knickkurve“ bezeichnet wird, zerfällt einerseits in die doppelt zu zählende Gerade PP_0 (da sie während einer vollen Bewegungsperiode hin und zurück durchlaufen wird) und die Kurve q . Letztere wird beschrieben, wenn das Knie in die Lage BP_kD gebracht wird. Außerdem gehören noch dazu die Spiegelbilder von PP_0 und q in Bezug auf die Grundlinie UT . Für die Geradföhung kommt nur die Bewegung auf der Geraden PP_0 in Frage, die etwa der auf einer Ellipse entspricht, deren kleine Achse auf Null zusammengeschrumpft ist.

Die Bewegung besitzt daher bei P und P_0 Todlagen und die Geschwindigkeit des Punktes P ändert sich bei gleichförmiger Drehbewegung des Koppelgliedes c von Null über einen Maximalwert bis Null, ähnlich wie die Axialgeschwindigkeit bei einer Kreisbewegung.

Bei der Geradföhung (Bild 10) ist $a + c > 2b$ gewählt. Bewegt man das Kurbelviereck in die Lage UV_mW_mT , so gelangt der Punkt P in die labile Stellung P_m , in der die beiden Glieder B_mP_m und D_mP_m in eine Gerade fallen; im übrigen erstreckt sich die Geradföhung ebenso weit unterhalb wie oberhalb der Grundlinie UT . Das gleiche gilt von der Geradföhung Bild 11, bei der $a + c = 2b$ gewählt ist. Hier fallen aber außerdem in der mittleren Lage die Glieder UV_m , V_mW_m , W_mT in der durch UT gehenden Geraden zusammen. Der Punkt P_m ist daher doppelt labil. Der Punkt D_m in Bild 10 wird in folgender Weise bestimmt. Man macht $W_mE = WP$ und zieht die Linie P_mE , dann liegt D_m auf der Mittensenkrechten von P_mE , da $W_mD_m + D_mP_m = WP = WD + DP$ ist.

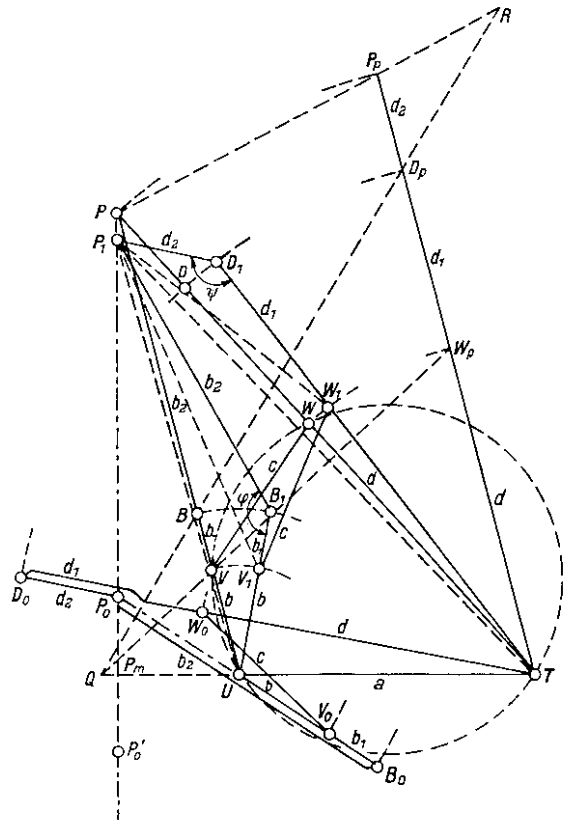


Bild 12.

In den vorherbeschriebenen Sonderfällen (Bild 9, 10, 11), in denen $UV = TW$ gewählt wurde, erfolgt die Geradföhung auf der Mittensenkrechten zu UT . Aus konstruktiven Rücksichten kann es aber auch erwünscht sein, daß die Geradföhungslinie die Grundlinie unsymmetrisch und besonders außerhalb der Strecke UT schneidet. Ein derartiger, gleichfalls von Hart angegebener und daher als zweite Hartsche Geradföhung bezeichneter Mechanismus soll an Hand des Bildes 12 nunmehr ent-

¹⁾ R. Müller (l. c.) hat nachgewiesen, daß die allgemeine Knickkurve unter Annahme eines beliebigen Kurbelvierecks, bei dem die Punkte B und D nicht auf UV bzw. TW liegen, eine Kurve 14. Ordnung ist, daß sie aber in den hier behandelten Sonderfällen in eine doppelt zu zählende Gerade und eine bizirkulare Kurve 8. Ordnung in Bild 9 und 10, bzw. eine bizirkulare Kurve 6. Ordnung in Bild 11 und eine vierfach zirkulare Kurve 8. Ordnung in Bild 12 zerfällt.

wickelt werden¹⁾. Soll der Punkt P auf der Geraden $PP_0 \perp UT$ gerade geführt werden und betrachten wir die Lage P_1 dieses Punktes, so ist nach einem bekannten geometrischen Satz

$$TP_1^2 - UP_1^2 = TP_m^2 - UP_m^2 = \text{konst} = k^2.$$

Hierin ist

$$UP_1^2 = (b + b_1)^2 + b_2^2 + 2(b + b_1)b_2 \cos \varphi,$$

$$TP_1^2 = (d + d_1)^2 + d_2^2 + 2(d + d_1)d_2 \cos \psi,$$

also

$$k^2 = (d + d_1)^2 - (b + b_1)^2 + d_2^2 - b_2^2 + 2[(d + d_1)d_2 \cos \psi - (b + b_1)b_2 \cos \varphi].$$

Wählt man nun, um das letzte Glied zum Verschwinden zu bringen,

$$\frac{d + d_1}{b + b_1} = \frac{d}{b} = \delta \quad (2)$$

und

$$\frac{d_2}{b_2} = \frac{b}{d} = \frac{1}{\delta}, \quad (3)$$

woraus sich

$$\frac{d_1}{b_1} = \delta = \frac{b_2}{d_2} \quad (4)$$

ergibt, so wird

$$\begin{aligned} k^2 &= (\delta^2 - 1)(b + b_1)^2 + (\delta^2 - 1)b^2 + 2[\delta(b + b_1)\frac{b_2}{\delta} \cos \psi - (b + b_1)b_2 \cos \varphi] \\ &= (\delta^2 - 1)[(b + b_1)^2 + b^2] + 2(b + b_1)b_2(\cos \psi - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, daß unter obengenannten Voraussetzungen $\cos \psi = \cos \varphi$ oder

$$\psi = \varphi, \quad (5)$$

sein muß.

Die Bedingungen (2) und (3) bedeuten, daß

$$\Delta P_1 B_1 V_1 \text{ umgekehrt ähnlich } \Delta T D_1 P_1$$

und

$$\Delta P_1 D_1 W_1 \text{ umgekehrt ähnlich } \Delta U B_1 P_1 \text{ ist.}$$

Die Punkte V_1 bzw. W_1 können daher so konstruiert werden, daß man den

$$\sphericalangle B_1 P_1 V_1 = \sphericalangle D_1 T P_1$$

bzw.

$$\sphericalangle D_1 P_1 W_1 = \sphericalangle B_1 U_1 P_1 \text{ macht.}$$

Aus der Ähnlichkeit dieser Dreieckspaare ergibt sich

$$\frac{P_1 W_1}{P_1 U} = \frac{d_1}{b_2} \quad (6)$$

und

$$\frac{P_1 V_1}{P_1 T} = \frac{b_1}{d_2}, \quad (7)$$

daher mit Gleichung (4)

$$\frac{P_1 W_1}{P_1 V_1} = \frac{P_1 U}{P_1 T} \frac{d_1 d_2}{b_2 b_1} = \frac{P_1 U}{P_1 T} \frac{\delta b_1 \frac{1}{\delta} b_2}{b_1 b_2} = \frac{P_1 U}{P_1 T}. \quad (8)$$

¹⁾ Die in Bild 9, 10, 11 dargestellten Mechanismen kann man daher als Sonderfälle der zweiten Hartschen Geradföhrung bezeichnen.

Ferner ist auch

$$\sphericalangle V_1 P_1 W_1 = \sphericalangle U P_1 T, \quad (9)$$

denn es ist

$\sphericalangle U P_1 V_1 = \sphericalangle U P_1 B_1 - \sphericalangle B_1 P_1 V_1 = \sphericalangle P_1 W_1 D_1 - \sphericalangle P_1 T D_1 = \sphericalangle T P_1 W_1$,
daher ist $\triangle P_1 W_1 V_1$ umgekehrt ähnlich $\triangle P_1 U T$, woraus sich

$$V_1 W_1 = a \frac{P_1 V_1}{P_1 T}$$

ergibt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $P_1 B_1 V_1$ und $T D_1 P_1$ ergibt sich aber

$$\frac{P_1 V_1}{P_1 T} = \frac{b_1}{d_2},$$

daher ist

$$V_1 W_1 = c = a \frac{b_1}{d_2} = \text{konst} \quad (10)$$

Der Mechanismus bleibt daher unter Einfügung eines konstanten Gliedes $V_1 W_1$ zwangläufig beweglich, und umgekehrt wird der Punkt P_1 in der Richtung der Geraden $P P_m$ gerade geführt, wenn die Koppel $V_1 W_1$ zwischen die oben bestimmten Punkte V_1 und W_1 eingefügt wird.

Nach weiteren Angaben von Darboux kann man noch folgende Gleichungen aufstellen:

$$b : b_1 : b_2 : (b + b_1) = b(a^2 - c^2) : b c^2 : a c d : a^2 b, \quad (11)$$

$$d : d_1 : d_2 : (d + d_1) = d(a^2 - c^2) : d c^2 : a c b : a^2 d. \quad (12)$$

Bei der Entwicklung dieser Geradföhung sind wir im wesentlichen der sehr klaren aber etwas umständlichen Darstellung von Darboux gefolgt, wobei durch einige Vereinfachungen Kürzungen ermöglicht wurden.

Eine weitere Vereinfachung ist jedoch möglich, wenn wir, wie bei den Bildern 9, 10, 11, von der gestreckten Anfangslage $U P T$ des Mechanismus ausgehen, wobei die Gleichungen (2), (3), (4) zugrunde gelegt werden.

Es werde angenommen, daß außer den Strecken $U T = a$, $U P = u$ und $T P = t$ noch die Viereckseite $U V = b$ gegeben ist. Nach Gleichung (1) ist für den Fall der Geradföhung des Punktes P $\sphericalangle P V W = \sphericalangle P T U$, woraus sich auch ergibt, daß die Punkte $U V W T$ auf einem Kreise liegen. Legt man daher durch $T U V$ einen Kreis oder trägt man $V W$ unter dem $\sphericalangle P V W = \sphericalangle P T U$ an $P V$ an, so erhält man den Punkt W auf $T P$ und damit auch das Verhältnis $\frac{W T}{V U} = \frac{d}{b} = \delta$.

Für die Konstruktion der Punkte B und D ist zu beachten, daß nach Gleichung (4)

$$\frac{d_1}{b_1} = \frac{d}{b} = \delta \quad \text{und} \quad \frac{d_2}{b_2} = \frac{b}{d} = \frac{1}{\delta}$$

und daß ferner

$$b_1 + b_2 = V P \quad \text{und} \quad d_1 + d_2 = W P$$

ist. Dreht man daher die Gerade $T W P$ in die Lage $T W_p P_p$ ($\sphericalangle U B P$) und zieht $W_p V Q$, so ist $\frac{T Q}{U Q} = \frac{d}{b} = \delta$. Wählt man ferner auf der Geraden $P P_p$ den Punkt R so, daß der Vertikalabstand von R von $T P_p$ gleich dem des Punktes Q von $U P$ ist, so ist

$$\frac{R P}{R P_p} = \frac{d}{b} = \delta.$$

Zieht man endlich die Gerade QBD_pR , so ist

$$\frac{W_p D_p}{V B} = \frac{d_1}{b_1} = \frac{d}{b} \quad \text{und} \quad \frac{D_p P_p}{B P} = \frac{d_2}{b_2} = \frac{b}{d}.$$

Macht man daher $TD = TD_p$, so sind die gewünschten Punkte B und D bestimmt.

Die Geradföhrung dehnt sich über die Strecke PP_0 (bzw. ihr Spiegelbild zu UT') aus, wobei P_0 durch die Beziehungen

$$UP_0 = b_2 - (b + b_1) \quad (13)$$

und

$$TP_0 = (d + d_1) - d_2 \quad (14)$$

gegeben ist, da in dieser Stellung einerseits b_2 und $(b + b_1)$, andererseits d_2 und $(d + d_1)$ in je eine Gerade zusammenfallen.

Hieraus läßt sich eine dritte Konstruktion zur Bestimmung der Stücke $d + d_1$, und d_2 ableiten, wenn — statt b und $(b + b_1 + b_2)$ — $(b + b_1)$ und b_2 als bekannt angenommen werden. Denn hierdurch ist nach Gleichung (13) auch der Punkt P_0 gegeben. Andererseits ist

$$TP_0 = (d + d_1) - d_2 \quad (15)$$

und

$$TP = (d + d_1) + d_2, \quad (16)$$

woraus sich

$$d + d_1 = \frac{1}{2}(TP + TP_0) \quad (17)$$

und

$$d_2 = \frac{1}{2}(TP - TP_0) \quad (18)$$

ergibt. Die Punkte V und W werden gefunden, indem nach Gleichung (11) und (12) sowie (2), (3) und (4)

$$\frac{b_2}{b + b_1} = \frac{cd}{ab}, \quad \frac{c}{a} = \frac{b}{d} \frac{b_2}{b + b_1} = \frac{d_2}{b + b_1}, \quad (19)$$

$$\frac{b_1}{b + b_1} = \frac{c^2}{a^2}; \quad b_1 = \frac{d_2^2}{b + b_1} \quad \text{und entsprechend} \quad d_1 = \frac{b_2^2}{d + d_1} \quad (20)$$

ermittelt wird.

Zum Schluß möge noch als Sonderfall eine interessante Gelenkgeradföhrung (Bild 13) behandelt werden, die von Darboux aus der zweiten Hartschen Geradföhrung abgeleitet ist und in ihrer Wirkung dem Ellipsenlenker entspricht, aber gegenüber diesem nur Gelenke besitzt.

Die senkrecht zu UT stehende Gerade, auf der der Punkt P geföhrt wird, soll wie beim Ellipsenlenker durch den Punkt U gehen, so daß $\sphericalangle PUT = 90^\circ$ ist. Das Glied $P_1B_1 = b_2$ ist über B_1 hinaus um den gleichen Betrag $B_1Q_1 = b_2$ verlängert und der Punkt B_1 wird durch die Schwinge $UB_1 = b + b_1 = b_2$ auf einem Kreise geföhrt. Wenn daher P auf PU gerade geföhrt wird, so geschieht das gleiche wie beim Ellipsenlenker auch mit Q_1 auf UQ_0 .

Wie leicht zu erkennen, muß das zur Geradföhrung von P herangezogene Kurbelviereck $UVWT$ ein zweiseitig durchschlagendes sein, denn einerseits ist für jede Geradföhrung $\sphericalangle PVW = \sphericalangle PTU$ und bei der vorliegenden vertikalen Geradföhrung $\sphericalangle VWT = \sphericalangle VUT = 90^\circ$, andererseits fallen in den Durchschlagstellungen die Glieder $abcd$ in der Geraden TU zusammen, so daß $c = b$ und $d = a$ sowie $b + b_1 = b_2$ sein muß. In der äußeren Durchschlagstellung fallen aber gleich-

