Vom Fachbereich
für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Braunschweig

genehmigte Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Frank Henningsen

Brauer-Severi-Varietäten und Normrelationen von Symbolalgebren

Braunschweig, 31. Mai 2000

Referenten: Prof. Dr. Hans Opolka
Prof. Dr. Norbert Knarr

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

I Darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten 7

2 Grundlagen **9**
2.1 Grassmann-Algebra 9
2.2 Plücker-Einbettung 15
2.3 Plücker-Relationen 24
2.4 Umkehrung der Plücker-Einbettung 29

3 Darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten **33**
3.1 Definition und erste Eigenschaften 34
3.2 Beispiele 38
3.3 Invarianzvarietäten und Eigenwerte 40
3.4 Geometrische Eigenschaften 44
3.5 Spezielle Darstellungen 50

4 Anwendung auf zentraleinfache Algebren **57**
4.1 Einfache Algebren 58
4.2 Darstellungen einfacher Algebren 62
4.3 Invarianzvarietäten von einfachen Algebren 66
4.4 Eigenschaften im Fall zentraleinfacher Algebren 69

II Linksidealvarietäten von Gruppenalgebren 73

5 Linksidealvarietäten von Gruppenalgebren **75**
5.1 Verschränkte Gruppenalgebren 75
5.2 Induzierte Operation 78
5.3 Linksidealvarietäten und Bahnstruktur 83
5.4 Anmerkungen 90

6 Linksidealvarietäten von Symbolalgebren **93**

6.1 Verschränkte Produkte und zyklische Algebren 93
6.2 Symbolalgebren 97
6.3 Linksidealvarietäten von Symbolalgebren 103
6.4 Beispiel: Symbolalgebren vom Grad 3 110

III Brauer-Severi-Varietäten von Symbolalgebren 115

7 Beispiel: Symbolalgebren vom Grad 3 **117**

7.1 Sortierungsunabhängige Plücker-Relationen 118
7.2 Normrelationen 122
7.3 Konstruktion von Idealen 128
7.4 Brauer-Severi-Varietäten 132

8 Brauer-Severi-Varietäten und Normrelationen **133**

8.1 Verallgemeinerte Plücker-Relationen 133
8.2 Summen von Matrixminoren 138
8.3 Normrelationen 147
8.4 Anmerkungen 151

9 Konstruktion von Idealen von Symbolalgebren **153**

9.1 Étale Algebren 153
9.2 Konstruktion 155

10 Brauer-Severi-Varietäten von Symbolalgebren **159**

A Grundlagen aus der algebraischen Geometrie **167**

A.1 Geometrisches Konzept 167
A.2 Birationale Korrespondenzen 170
A.3 Algebraische Gruppen und Quotienten von Varietäten 174

B Bahnstruktur **177**

C Reduzierte Plücker-Relationen (Beispiel) **179**

Literaturverzeichnis **191**

Symbolverzeichnis **195**

Stichwortverzeichnis **197**

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist, die Brauer-Severi-Varietät einer zentraleinfachen Algebra durch explizite Gleichungen birational zu beschreiben.
Die Definition von Brauer-Severi-Varietäten geht auf Châtelet (siehe [9], 1944) zurück:[1] Eine über einem Grundkörper k definierte Varietät V heißt *Brauer-Severi-Varietät*, falls V über einem separablen Abschluß k_{sep} von k isomorph zum projektiven Raum $\mathbf{P}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ wird.
Châtelet ordnet jeder Brauer-Severi-Varietät eine zentraleinfache k-Algebra zu, und zwar mit Hilfe eines Kalküls, der sich in moderner Terminologie kohomologisch formulieren läßt.[2] Daß diese Zuordnung eine Bijektion ist, geht aus Ergebnissen hervor, die Weil 1956 in [43] gezeigt hat. Eine wesentliche Eigenschaft dieser Zuordnung ist, daß eine Algebra A über einem Erweiterungskörper K/k genau dann zerfällt, wenn die zu A gehörige Brauer-Severi-Varietät V_A einen K-rationalen Punkt hat.
Im einfachsten Fall erhält man eine bijektive Korrespondenz zwischen Quaternionenalgebren $(a,b)_k$ und über k definierten Kegelschnitten[3]

$$V : ax^2 + by^2 = z^2 \ \subseteq \mathbf{P}^2 \qquad \text{mit } a, b \in k^*.$$

Doch schon für Brauer-Severi-Varietäten von zentraleinfachen Algebren vom Grad 3 sind keine überschaubaren Beschreibungen durch explizite Gleichun-

[1] Zur Entwicklung der Theorie der Brauer-Severi-Varietäten und Châtelets Beitrag dazu siehe Colliot-Thélène [10]. Weitere Referenzen für Brauer-Severi-Varietäten sind: Artin [4], Blanchet [5], Brzezinski [8], Jacobson [22], chap. III, Knus u. a. [26], p. 9 ff.

[2] Siehe Serre [39], chap. X, 5 & 6 oder Serre [40], chap. III, 1.

[3] Diese Korrespondenz war schon 1934 Witt bekannt (siehe Witt [44]). Allerdings betrachtet er statt der Kegelschnitte die dazugehörigen Funktionenkörper. Diese Betrachtungsweise mit Betonung birationaler Zusammenhänge wird von Amitsur in [3] auf beliebige zentraleinfache Algebren ausgedehnt und von Roquette in [34] kohomologisch beschrieben.

gen bekannt.[4] Um dieses Problem anzugehen, kann man zunächst die Beweise, die zeigen, daß die Korrespondenz bijektiv ist, untersuchen. Tatsächlich verwendet Weil eine Konstruktion, die man als getwistete Quotientenbildung bezeichnen kann und geeignete Varietäten liefert.[5] Es gibt aber noch einen weiteren Beweis,[6] der andere Methoden verwendet. Ist A eine zentraleinfache k-Algebra, so betrachtet man die Menge aller minimalen Linksideale. Diese kann mit Hilfe der Plücker-Einbettung in einen projektiven Raum eingebettet werden und führt zu einer Untervarietät V_A einer Grassmann-Varietät. V_A ist eine Brauer-Severi-Varietät und die Zuordnung $A \longmapsto V_A$ ist mit der von Châtelet verträglich.

Diese Konstruktion legt Verallgemeinerungen nahe. Blanchet[7] betrachtet *verallgemeinerte Brauer-Severi-Varietäten*, die entstehen, wenn die Menge der minimalen Linksideale von A durch die Menge aller Linksideale einer bestimmten Dimension d ersetzt wird. Betrachtet man ein Linksideal von A als einen k-Untervektorraum von A, der invariant unter der Linksmultiplikation ist, so liegt eine weitere Verallgemeinerung nahe, die im **Teil I** der Arbeit vorgestellt wird:

Ist $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine k-lineare Darstellung einer beliebigen k-Algebra A, so wird die Menge aller Linksideale von A ersetzt durch die Menge der d-dimensionalen Untervektorräume von k^n, die θ-invariant, d.h. invariant unter der durch θ induzierten Operation von A auf k^n sind. Die entstehenden Varietäten werden *darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten* genannt. Wählt man für θ die linksreguläre Darstellung einer zentraleinfachen Algebra A, so erhält man obige Konstruktion von Brauer-Severi-Varietäten.

Die Bedingung, daß ein Untervektorraum θ-invariant ist, läßt sich für sein Bild unter der Plücker-Einbettung als Nullstellenbedingung einer Menge von Polynomen ausdrücken. Die durch diese Polynome definierte Varietät wird *Invarianzvarietät* genannt. Eine darstellungsinvariante Grassmann-Varietät ist genau der Durchschnitt einer Grassmann-Varietät und einer Invarianzvarietät. Ist A einfach, so bestehen die Invarianzvarietäten zu A aus Durchschnitten von Eigenräumen zu bestimmten Matrizen.[8] Invarianzvarietäten sind also linear.

Im Fall einer Brauer-Severi-Varietät werden Invarianzvarietäten *Linksideal-*

---

[4]Siehe etwa entsprechende Bemerkungen in Brzezinski [8], p. 21.

[5]Siehe Weil [43], sec. I.

[6]Siehe etwa Jacobson [22], par. 3.5. Es konnte nicht festgestellt werden, auf wen dieser Beweis zurückgeht. Eine frühe Erwähnung findet sich 1962 bei Serre [39], chap. X, 6, die allerdings sehr skizzenhaft ist.

[7]Siehe Blanchet [5]. Dort wird erwähnt, daß unabhängig diese Verallgemeinerung auch von Schofield und van den Berg in [37] und [38] untersucht werden.

[8]Siehe Abschnitt 4.3.

varietäten genannt. Diese werden für verschränkte Gruppenalgebren im **Teil II** der Arbeit untersucht. Das Hauptergebnis dieses Teils ist eine Beschreibung von Linksidealvarietäten[9] von verschränkten Gruppenalgebren durch lineare Gleichungen der Form

$$x_M \;=\; D(M)x_N \;, \tag{$*$}$$

wobei x_M und x_N Koordinaten eines Punktes aus einem projektiven Raum sind und $D(M) \in k^*$ ist.[10] Da im wesentlichen jede Koordinate in nur einer Gleichung auftaucht, können diese Gleichungen als Ersetzungsrelationen interpretiert werden:[11]
Die Punkte einer Brauer-Severi-Varietät V_A sind die gemeinsamen Nullstellen der definierenden Polynome p_i einer Grassmann-Varietät und aller linearen Gleichungen $(*)$. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, daß ein Punkt gemeinsame Nullstelle all der Polynome ist, die aus den p_i hervorgehen, wenn alle Koordinaten x_M durch Koordinaten $D(M)x_N$ ersetzt werden. Dadurch reduziert sich die Variablenanzahl und die Zahl der definierenden Polynome von V_A. Im Fall einer Symbolalgebra A vom Grad 3 ist die dazugehörige Brauer-Severi-Varietät V_A im Raum $\mathbf{P}^{83}$ durch ca. 18000 Gleichungen definiert. Die Ersetzungen liefern eine zu V_A isomorphe Brauer-Severi-Varietät im $\mathbf{P}^{11}$, die durch 138 Gleichungen definiert ist.[12]
Allerdings ist auch diese Beschreibung nicht sehr befriedigend, zumal die Größe der reduzierten Polynommenge für Algebren höheren Grades stark wächst.
Im **Teil III** der Arbeit wurde ein konzeptionell anderer Ansatz gewählt, der auf dem vorigen aufbaut und Verbindungen zu anderen algebraisch-geometrischen Konzepten, die mit zentraleinfachen Algebren zusammenhängen, herstellt. Er ist durch folgendes Normkriterium motiviert:[13]
Sei $A := \left(\frac{a,b}{k,\xi}\right)$ eine Symbolalgebra vom Grad d und K/k eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent

i) A zerfällt über K.

ii) V_A hat einen K-rationalen Punkt.

iii) b ist Norm in $K(\alpha)/K$ mit $\alpha^d = a$.

[9]Genauer gesagt von einer Komponente einer Linksidealvarietät, die *reduzierte Linksidealvarietät* genannt wird.
[10]Siehe Satz 5.13.
[11]Siehe die Bemerkungen nach Satz 5.13.
[12]Siehe Abschnitt 6.4.
[13]Siehe Sätze 6.4 iii) und 6.10.

Ist $n_{k(\alpha)/k}(x)$ das Normpolynom von $k(\alpha)/k$ (bezüglich einer Basis) in den Variablen[14] $x = (x_1, \ldots, x_d)$ und $ZN_b \subseteq \mathbf{P}^d$ die Norm-b-Varietät von $k(\alpha)/k$, also die Nullstellenmenge des Polynoms $n_{k(\alpha)/k}(x) - bx_0^d$, so läßt sich iii) auch folgendermaßen formulieren:

iii)' ZN_b hat einen K-rationalen Punkt.

Es läßt sich nun die Frage stellen, ob und wie sich diese logische Verknüpfung der Varietäten V_A und ZN_b auch geometrisch ausdrücken läßt.
Im oben erwähnten Beispiel der Quaternionenalgebra $A = (a, b)_k$ ist diese Verbindung einfach, denn wegen

$$n_{k(\alpha)/k}(x) = N_{k(\alpha)/k}(x_1 + \alpha x_2) = x_1^2 - a x_2^2$$

gilt

$$V_A \cong_k ZN_b.$$

Für Symbolalgebren A vom Grad $d \geq 3$ ist solch eine Isomorphie nicht möglich, da V_A regulär, ZN_b für $(k(\alpha) : k) \geq 3$ hingegen singulär ist.
Allerdings kann gezeigt werden, und das ist das Hauptergebnis des dritten Teils dieser Arbeit,[15] daß für Symbolalgebren beide Varietäten birational äquivalent sind. Eine Folgerung daraus ist, daß die zu den Varietäten gehörenden Funktionenkörper isomorph sind.
Eine Verallgemeinerung der Methoden scheint möglich zu sein — man würde so unter anderem Normkriterien für eine größere Klasse von Algebren erhalten.
Diese Ergebnisse hängen mit vielen mathematischen Gebieten zusammen, so etwa mit der Theorie der Brauergruppe eines Körpers oder der Theorie der quadratischen Formen.[16] Im Beweis des Satzen von Merkurjew / Suslin[17] werden Funktionenkörper von Brauer-Severi-Varietäten von Symbolalgebren verwendet. In der Arbeit [42] von Sommer wird eine Methode vorgestellt, mit der aus rationalen Punkten einer Brauer-Severi-Varietät konkrete Lösungen von Einbettungsproblemen konstruiert werden.
Wegen des Umfangs des Themas konnten viele Fragen nicht weiter vertieft werden, insbesondere die oben angedeuteten Möglichkeiten der Verallgemeinerung dieser Ergebnisse. So fehlen eine Untersuchung der Anwendung auf

[14] Tatsächlich kann der Grad der Erweiterung $k(\alpha)/k$ kleiner als d sein, doch sei hier der Einfachheit halber $(k(\alpha) : k) = d$ angenommen.
[15] Siehe Satz 10.2.
[16] Siehe Scharlau [36], chap. 8.
[17] Siehe Kersten [25], Kap. V.

andere Bereiche, etwa die Konstruktion von Lösungen von Einbettungsproblemen, oder die kohomologische Deutung der Ergebnisse.

Danken möchte ich allen, die mich während meiner Arbeit an diesem Thema unterstützt haben, allen voran meiner Frau Stefanie. Mein besonderer Dank gilt Prof. Opolka, der die Arbeit betreut hat. Sein Interesse an den mathematische Problemen, die sich in ihrem Verlauf ergeben haben, und seine Anregungen haben viel zum Fortschritt der Arbeit beigetragen.

Teil I

Darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten

Kapitel 2

Grundlagen

Viele der in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels bereitgestellten Grundlagen sind allgemein bekannt und leicht zugänglich. Daß sie trotzdem und in dieser Auswahl in die Arbeit aufgenommen wurden, liegt daran, daß die hier entwickelte Notation, die in diesem Zusammenhang vielleicht etwas überdimensioniert wirkt, in späteren Kapiteln gebraucht wird. Quellen, auch für Grundlagen aus dem nächsten Kapitel, sind Jacobson [22], chap. 3.4, Borel [6], Hodge / Pedoe [16], Vol. I, chap. VII und Humphreys [18].
Die Beschreibung der Umkehrung der Plücker-Einbettung in Abschnitt 2.4 ist zwar naheliegend und für das weitere hilfreich, konnte aber so in der Literatur nicht gefunden werden, ebenso die Berechnungen in Abschnitt 2.3.

2.1 Grassmann-Algebra

Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum der Dimension $n < \infty$.

Definition (Grassmann-Algebra).

$$\begin{aligned}
\bigwedge^d(V) &:= \Big(\underbrace{V \otimes_k \ldots \otimes_k V}_{d\times}\Big)/N \quad \text{mit } d \in \mathbb{N}, \\
N &:= \big\langle u_1 \otimes \ldots \otimes u_d \mid u_i = u_j \text{ für ein Paar } i \neq j \big\rangle_{k\text{-Mod}}, \\
\bigwedge^0(V) &:= k, \\
\bigwedge(V) &:= \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} \bigwedge^d(V).
\end{aligned}$$

$\bigwedge^d(V)$ ist ein k-Vektorraum. Auf $\bigwedge(V)$ wird durch die multiplikative Struktur der Tensoralgebra eine Multiplikation induziert:

$$\big(u_1 \otimes \ldots \otimes u_d + N\big)\ \big(u'_1 \otimes \ldots \otimes u'_{d'} + N\big) \ := \\ u_1 \otimes \ldots \otimes u_d \otimes u'_1 \otimes \ldots \otimes u'_{d'} + N.$$

$\bigwedge(V)$ heißt *Grassmann-Algebra*, und $\bigwedge^d(V)$ ist deren *d-te Komponente*. Die Vektoren der Form $u_1 \otimes \ldots \otimes u_d + N$ heißen *zerlegbare Vektoren* und werden mit

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_d := u_1 \otimes \ldots \otimes u_d + N$$

bezeichnet. Die Elemente der Grassmann-Algebra sind also von der Form

$$w = \sum_{i=1}^{m} u_{i,1} \wedge \ldots \wedge u_{i,d_i}$$

mit $d_i \in \mathbb{N}$ und $u_{i,j} \in V$. Falls $m = 1$ gewählt werden kann, so ist w zerlegbar. Sind alle $d_i = d$, dann ist $w \in \bigwedge^d(V)$.
Sei $w \in \bigwedge^d(V)$ und $w = u_1 \wedge \ldots \wedge u_d$. Dann gilt

$$\ldots \wedge u_i \wedge \ldots \wedge u_j \wedge \ldots = - \ldots \wedge u_j \wedge \ldots \wedge u_i \wedge \ldots \ ,$$

weil

$$\begin{aligned} 0 &= \ldots \wedge u_i + u_j \wedge \ldots \wedge u_i + u_j \wedge \ldots \\ &= \underbrace{\ldots \wedge u_i \wedge \ldots \wedge u_i \wedge \ldots}_{=0} + \underbrace{\ldots \wedge u_j \wedge \ldots \wedge u_j \wedge \ldots}_{=0} + \\ &\quad \ldots \wedge u_i \wedge \ldots \wedge u_j \wedge \ldots + \ldots \wedge u_j \wedge \ldots \wedge u_i \wedge \ldots \ . \end{aligned}$$

Ist $\sigma \in \mathcal{S}_d$ ein Element der symmetrischen Gruppe, so folgt

$$\sigma(w) = \mathrm{sign}(\sigma) w$$

mit der Festlegung

$$\sigma(w) := u_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge u_{\sigma(d)}.$$

Im folgenden wird der Prozeß, aus einer endlichen Menge X von Indizes durch Übergang zu den d-elementigen Teilmengen neue Indizes zu bilden, eine große Rolle spielen. Deshalb werden hier folgende Schreibweisen eingeführt:

Definition.

i) Sei X eine n-elementige Menge mit einer linearen Ordnung „$<$“ und $d \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq d \leq n$. Sei X^d die Menge der d-Tupel $M = (i_1, \ldots, i_d)$ mit Werten i_j aus X. X^0 besteht nur aus dem leeren Tupel $()$. Definiere

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^\circ_{d,X} &:= \Big\{(i_1, \ldots, i_d) \in X^d \;\Big|\; i_j \neq i_l \;\text{ für alle } j, l \text{ mit } j \neq l\Big\} \\
\mathcal{M}_{d,X} &:= \Big\{M \in \mathcal{M}^\circ_{d,X} \Big|\; i_1 < \ldots < i_d\Big\} \\
\mathcal{M}(X) &:= \bigcup_{0 \leq d \leq n} \mathcal{M}_{d,X}
\end{aligned}$$

$\mathcal{M}^\circ_{d,X}$ ist die Menge der d-Tupel verschiedener Elemente der Menge X, und $\mathcal{M}_{d,X}$ besteht aus der Teilmenge der bezüglich „$<$“ geordneten Tupel aus $\mathcal{M}^\circ_{d,X}$. Wird als Indexmenge die Menge $X = \{1, \ldots, n\}$ mit der natürlichen Ordnung verwendet, so wird in den Bezeichnungen statt X die Ordnung n angegeben. Sollte aus dem Zusammenhang klar sein, welches X bzw. n gemeint ist, wird es in der Bezeichnung fortgelassen.

ii) Ist $M = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathcal{M}^\circ_{d,X}$, so sei π_M die Permutation aus der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_d$, die M bezüglich „$<$“ sortiert, d.h. π_M ist die eindeutig bestimmte Permutation, so daß

$$i_{\pi_M(1)} < \ldots < i_{\pi_M(d)}$$

gilt. Bezeichne mit

$$\overline{} : \mathcal{M}^\circ_{d,X} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,X};\; M \longmapsto \overline{M} := \big(i_{\pi_M(1)}, \ldots, i_{\pi_M(d)}\big)$$

die surjektive Abbildung, die jedem $M \in \mathcal{M}^\circ_{d,X}$ das bezüglich „$<$“ geordnete Tupel $\overline{M}$ zuordnet.

iii) Für elementfremde Tupel $M_1 = (i_1, \ldots, i_{d_1})$ und $M_2 = (j_1, \ldots, j_{d_2})$ seien die Operationen „$+$“ und „$\cup$“ durch

$$\begin{aligned}
&M_1 + M_2 := (i_1, \ldots, i_{d_1}, j_1, \ldots, j_{d_2}) \text{ bzw.} \\
&M_1 \cup M_2 := \overline{M_1 + M_2}
\end{aligned}$$

definiert. Für beliebige Tupel $M_1, M_2 \in \mathcal{M}^\circ_{d,X}$ sei $M_1 \cap M_2$ das geordnete Tupel der Elemente, die beiden Tupeln gemeinsam sind. Schreibe $i \in M$, falls $i = i_j$ für ein j, und $M_1 \subseteq M_2$, falls für jedes $i \in X$ mit $i \in M_1$ auch $i \in M_2$ gilt. Für zwei Tupel mit $M_1 \subseteq M_2$ sei $M_2 - M_1$

das Tupel der Elemente von M_2, die nicht in M_1 enthalten sind, in der gleichen Reihenfolge wie in M_2 angeordnet. Für $M-(i)$ schreibe auch $M-i$. Schreibe für () auch $\emptyset$. Für $i \in M$ sei $\operatorname{pos}(i,M)$ die Position, an welcher das Element i in M steht, d.h. ist $M=(i_1,\ldots,i_d)$, so ist $\operatorname{pos}(i_j,M)=j$.

iv) Sei $M=(i_1,\ldots,i_d)\in\mathcal{M}^\circ_{d,X}$ und $a:=(a_{ij})_{ij}\in\operatorname{Mat}_{n,d}k$ eine Matrix, deren Zeilen durch die Elemente von X indiziert sind. Dann sei

$$a_M := (a_{i_\nu j})_{1\le\nu,j\le d} = (a_{ij})_{i\in M} \in \operatorname{Mat}_{d,d}k$$

die quadratische Matrix, deren Zeilen durch die Indizes in M ausgewählt und entsprechend angeordnet werden.[18]

Sei $(e_1,\ldots,e_n)$ eine k-Basis von V und $d\in\mathbb{N}$. Sei $w=u_1\wedge\ldots\wedge u_d\in\bigwedge^d(V)$ ein zerlegbarer Vektor mit

$$u_j=\sum_{i_j=1}^n a_{i_j j}e_{i_j}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
w &= u_1\wedge\ldots\wedge u_d\\
&= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge\sum_{i_d=1}^n a_{i_d d}e_{i_d}\\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^n a_{i_1 1}\ldots a_{i_d d}\left(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_d}\right)\\
&= \sum_{M\in\mathcal{M}_{d,n}} \underbrace{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_d} a_{i_{\sigma(1)}1}\ldots a_{i_{\sigma(d)}d}\overbrace{\operatorname{sign}(\sigma^{-1})}^{=\operatorname{sign}(\sigma)}}_{=\det a_M} e_M,
\end{aligned}$$

wobei $e_M:=e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_d}$ für $M=(i_1,\ldots,i_d)$ und $a:=(a_{ij})_{ij}$ ist. Die zerlegbaren Vektoren von $\bigwedge^d(V)$ sind also genau die Vektoren der Form

$$w=\sum_{M\in\mathcal{M}_d}\det a_M e_M$$

[18] Auch die Schreibweise $(a_{ij})_{i\in M}$ soll so gemeint sein, daß M der Reihe nach durchlaufen wird.

mit einer Matrix $a \in \mathrm{Mat}_{n,d}\, k$. Bei einer solchen Darstellung werden die Werte $\det a_M$ *Plücker-Koordinaten* von a oder der Vektoren u_i genannt.[19] Ist $w \in \bigwedge^d(V)$ ein beliebiger Vektor mit $w = \sum_i u_{i,1} \wedge \ldots \wedge u_{i,d}$ und sind $a^{(i)}$ Matrizen, die als Spalten die Vektoren $u_{i,j}$ haben, so erhält man die eindeutige Darstellung

$$w = \sum_{M \in \mathcal{M}_d} p_M e_M \quad \text{mit} \quad p_M = \sum_i \det a^{(i)}_M.$$

Umgekehrt liefert jede Menge von Werten $p_M \in k$ einen Vektor

$$w := \sum_M p_M e_M \in \bigwedge^d(V).$$

Bemerkung 2.1. Für $0 \leq d \leq n$ ist

$$\bigwedge^d(V) = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}_d} k e_M, \quad \dim_k \bigwedge^d(V) = \binom{n}{d},$$

und für $d > n$ ist $\bigwedge^d(V) = 0$. Also gilt

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}(n)} k e_M, \quad \dim_k \bigwedge(V) = 2^n.$$

Um die Multiplikation in der Grassmann-Algebra explizit angeben zu können, ist eine weitere Schreibweise hilfreich: Sei A eine beliebige k-Algebra, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ mit $d_1 + d_2 \leq n$ und $\theta : \mathcal{M}_{d_1+d_2,n} \longrightarrow A$ eine Abbildung. Sei $M_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$ und $M_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$.

Definition.

$$\theta(M_1, M_2) := \begin{cases} 0 & \text{falls } M_1 \cap M_2 \neq \emptyset, \\ \epsilon\, \theta(M_1 \cup M_2) & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit $\epsilon = \operatorname{sign} \pi_{M_1+M_2}$.

Um die Notation besser handhaben zu können, werden die im folgenden relevanten Beispiele hier aufgelistet.

[19] Werden die Spalten von a als Erzeugende eines Unterraums U aufgefaßt, so sagt man auch, die Werte $\det a_M$ seien die Plücker-Koordinaten von U.

Beispiel.

i) Sei $A := \bigwedge(V)$ und für jedes $0 \leq d \leq n$ sei $\theta_d : \mathcal{M}_d \longrightarrow A$; $M \longmapsto e_M$. Sei $M_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$ und $M_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$. Schreibe abkürzend

$$e_{M_1,M_2} := \theta_{d_1+d_2}(M_1, M_2).$$

Die Multiplikation in der Grassmann-Algebra läßt sich nun explizit angeben. Für zwei Vektoren $e_{M_1}, e_{M_2} \in \bigwedge(V)$ mit $M_1 = (i_1, \ldots, i_{d_1})$ und $M_2 = (j_1, \ldots, j_{d_2})$ ist

$$\begin{aligned} e_{M_1} \wedge e_{M_2} &= e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{d_1}} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{d_2}} \\ &= e_{M_1,M_2}. \end{aligned}$$

Mit diesen Angaben hätte man die Grassmann-Algebra auch definieren können.

ii) Sei $A := k[x_M | M \in \mathcal{M}_d]$ der Polynomring über k, dessen Variablen durch die Elemente aus $\mathcal{M}_d$ indiziert sind, und $\theta : \mathcal{M}_d \longrightarrow A$; $M \longmapsto x_M$. Sei $M_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$ und $M_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$ mit $d_1 + d_2 = d$. Schreibe abkürzend

$$x_{M_1,M_2} := \theta(M_1, M_2).$$

Polynome aus A können als Funktionen auf $\bigwedge^d(V)$ aufgefaßt werden und treten als Plücker-Polynome im nächsten Abschnitt auf.

iii) Sei $A := k$, $w := \sum_M p_M e_M \in \bigwedge^d(V)$ und $\theta : \mathcal{M}_d \longrightarrow k$; $M \longmapsto p_M$. Sei $M_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$ und $M_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$ mit $d_1 + d_2 = d$. Schreibe abkürzend

$$p_{M_1,M_2} := \theta(M_1, M_2).$$

Sei $a := (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_{n,d} k$. Dann ist $w := \sum_{M \in \mathcal{M}_d} \det a_M e_M = \sum_M p_M e_M$ ein zerlegbarer Vektor und $\theta : \mathcal{M}_d \longrightarrow k$; $M \longmapsto \det a_M$. Es gilt für $M_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$ und $M_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$ mit $d_1 + d_2 = d$

$$p_{M_1,M_2} = \det a_{M_1+M_2},$$

d.h. durch die Definition von $p_{M_1,M_2} := \theta(M_1, M_2)$ wird eine Eigenschaft der Determinantenabbildung abstrakt für beliebige Koordinaten p_M nachgeahmt.

2.2 Plücker-Einbettung

Die Projektivierung[20] der d-ten Komponente der Grassmann-Algebra

$$\mathbf{P} \bigwedge^d (V)$$

dient im folgenden dazu, abstrakt gebildeten Mengen die Struktur einer projektiven Varietät zu verleihen, indem über die Plücker-Einbettung eine Bijektion zu einer abgeschlossenen[21] Teilmenge von $\mathbf{P} \bigwedge^d(V)$ hergestellt wird. So werden z.B. Grassmann- oder Brauer-Severi-Varietäten definiert.
Dabei ist es wichtig, daß sich die Varietäten bei Skalarerweiterung nicht „wesentlich" ändern. Dies kann folgendermaßen formuliert werden: Sei F ein Funktor von einer Kategorie von Körpererweiterungen[22] $\mathcal{G}(k)$ von k in die Kategorie der Mengen

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{G}(k) & \longrightarrow & \mathcal{SET}\ . \\ & K & \longmapsto & F(K) \end{array}$$

Definition. F heißt *darstellbar durch eine projektive Varietät*, falls es eine über k definierte projektive Varietät V gibt, so daß für jede Körpererweiterung $K \in \mathcal{G}(k)$ eine Bijektion zwischen den Elementen von $F(K)$ und den K-rationalen Punkten von V existiert.[23]

Sei k ein beliebiger Grundkörper und $\overline{k}$, wie im Anhang A.1 beschrieben, ein beliebiger, algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k. Im folgenden bestehe $\mathcal{G}(k)$ aus den Zwischenkörpern $\overline{k}/K/k$. Ein Beispiel für einen Funktor, der durch eine projektive Varietät darstellbar ist, ist der Grassmann-Funktor, wie in Satz 2.12 gezeigt werden wird.

Beispiel (Grassmann-Funktor). Seien V, n und d wie oben. Dann ist der *Grassmann-Funktor*[24] die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(k) & \longrightarrow & \mathcal{SET} \\ K & \longmapsto & \mathrm{Grass}_K(V, d) \end{array}$$

[20] Ist W ein k-Vektorraum und $\overline{k}$ ein fester algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k, so ist mit der *Projektivierung* $\mathbf{P}W$ von W der projektive Raum $\mathbf{P}(W \otimes_k \overline{k})$ gemeint. Identifiziere W mit dem k-Unterraum $W \otimes_k 1$ von $W \otimes_k \overline{k}$. Die k-rationalen Punkte von $\mathbf{P}W$ sind dann genau die Punkte der Form $\overline{k}^* w$ mit $w \in W$. Siehe auch Anhang A.1, S. 168.

[21] Topologische Aussagen sind, falls nicht anders erwähnt, auf die Zariski-Topologie bezogen.

[22] Die Menge der Objekte von $\mathcal{G}(k)$ ist eine Menge von Erweiterungskörpern K von k, einzige Morphismen sind die Inklusionen von k in K und die identischen Abbildungen.

[23] Vgl. Grothendieck/Dieudonné [14], (0.1.1.8).

[24] Vgl. Grothendieck/Dieudonné [14], (0.9.7).

mit

$$\mathrm{Grass}_K(V,d) := \Big\{ U \leq V_K \;\; K\text{-Untervektorraum} \mid \dim_K U = d \Big\}$$

und $V_K := V \otimes_k K$. Definiere $\mathrm{Grass}_K(n,d) := \mathrm{Grass}_K(K^n, d)$.

Verwende folgende Bezeichnungen:[25]

Definition.

i) $\mathrm{St}_{n,d}\, k := \Big\{ a \in \mathrm{Mat}_{n,d}\, k \;\Big|\; \det(a_M) \neq 0 \text{ für ein } M \in \mathcal{M}_{d,n} \Big\}$.

ii) Für Vektoren $a_1, \ldots, a_d \in k^n$ sei $(a_1|a_2|\ldots|a_d)$ die Matrix aus $\mathrm{Mat}_{n,d}\, k$ mit den Spalten a_i.

iii) Für eine Matrix $a \in \mathrm{Mat}_{n,d}\, k$ sei $\langle a \rangle$ der von den Spalten von a erzeugte k-Untervektorraum $\langle a_1, \ldots, a_d \rangle$ in k^n und

$$\wedge a := a_1 \wedge \ldots \wedge a_d \; .$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man die Abbildungen

$$\pi : \mathrm{St}_{n,d}\, k \longrightarrow \mathrm{Grass}_k(n,d); \;\; a \longmapsto \langle a \rangle \; ,$$

und

$$\wedge : \mathrm{St}_{n,d}\, k \longrightarrow \bigwedge^d k^n; \;\; a \longmapsto \wedge a \; .$$

Die Abbildung π ist surjektiv.

Bemerkung 2.2. Für eine Matrix $a \in \mathrm{Mat}_{n,d}\, k$ sind äquivalent

i) Die Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_d$ sind linear unabhängig.

ii) $a \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$.

iii) Es gibt ein $M \in \mathcal{M}_d$, so daß $\det a_M \neq 0$ ist.

iv) $\wedge a \neq 0$.

[25]Die Bezeichnung $\mathrm{St}_{n,d}\, k$ ist vom Begriff der *Stiefel-Mannigfaltigkeit* abgeleitet. Diese besteht aus den d-Tupeln linear unabhängiger Vektoren eines k-Vektorraums.

Beweis. Die Äquivalenz zwischen ii) und iii) ist die Definition von $\mathrm{St}_{n,d}\,k$, und die zwischen iii) und iv) folgt aus der Darstellung

$$\wedge a = \sum_{M \in \mathcal{M}_d} \det a_M e_M$$

aus dem vorigen Abschnitt.
„i) $\Longrightarrow$ iii)": Da der Rang von a gleich d ist, läßt sich a (analog zur Zeilenstufenform) durch Rechtsmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix aus $\mathrm{GL}_d\,k$ auf eine Spaltenstufenform a' mit genau d Stufen bringen. Sei M das geordnete Tupel dieser Stufenindizes und $a' = ab$ mit $b \in \mathrm{GL}_d\,k$. Dann ist a'_M eine obere Dreiecksmatrix, die nur nichttriviale Werte in der Diagonalen hat, und somit ist wegen $\det a'_M \neq 0$ auch $\det a_M \neq 0$.
„i) $\Longleftarrow$ iii)": Klar. □

Ein beliebiges Element $w \in \bigwedge k^n$ läßt sich mit dieser Bezeichnung als

$$w = \sum_{i=1}^{m} \wedge b_i$$

mit $b_i \in \mathrm{St}_{n,d_i}\,k$ schreiben. Ist $w \in \bigwedge^d k^n$, so sind alle $b_i \in \mathrm{St}_{n,d}\,k$. Die zerlegbaren Vektoren $w \in \bigwedge^d k^n$ sind von der Form

$$w = \wedge b = \sum_M \det b_M e_M$$

mit $b \in \mathrm{St}_{n,d}$. Die Gruppen $\mathrm{GL}_n\,k$ und $\mathrm{GL}_d\,k$ operieren[26] auf $\mathrm{St}_{n,d}\,k$ als Menge durch Links- bzw. Rechtsmultiplikation, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.3.

i) $a \in \mathrm{GL}_n\,k,\ b \in \mathrm{St}_{n,d}\,k \implies ab \in \mathrm{St}_{n,d}\,k.$

ii) $a \in \mathrm{GL}_d\,k,\ b \in \mathrm{St}_{n,d}\,k \implies ba \in \mathrm{St}_{n,d}\,k.$

Beweis. i) Da $b \in \mathrm{St}_{n,d}\,k$, läßt sich b durch weitere linear unabhängige Spalten zu einer quadratischen Matrix $\tilde{b}$ ergänzen, die eine nicht-triviale Determinante hat. Das Produkt $a\tilde{b}$ hat dann eine nicht-triviale Determinante, insbesondere sind die ersten d Spalten, also die Spalten von ab, linear unabhängig.
ii) Klar. □

[26] Unter Operation eines Monoids G auf einem Objekt A einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Homomorphismus $\theta : G \longrightarrow \mathrm{End}(A)$ von Monoiden gemeint, d.h. $\theta(\sigma\tau) = \theta(\sigma)\theta(\tau)$ und $\theta(1_G) = \mathrm{id}_A \in \mathrm{End}(A)$. Es wird die Schreibweise $\sigma a := \theta(\sigma)(a)$ für $\sigma \in G$ und $a \in A$ verwendet. Operation einer Gruppe G auf A ist eine Operation von G auf A als Monoid.

Bemerkung 2.4 (Induzierte Operationen). Diese Operationen induzieren durch die Abbildungen π und $\wedge$ weitere Operationen. Die Operation

$$\mathrm{Grass}_k(n,d) \times \mathrm{GL}_d\, k \longrightarrow \mathrm{Grass}_k(n,d); (\pi(b),a) \longmapsto \pi(ba)$$

ist trivial, da $\langle ba \rangle = \langle b \rangle$. Die Operation

$$\mathrm{GL}_n\, k \times \mathrm{Grass}_k(n,d) \longrightarrow \mathrm{Grass}_k(n,d); (a,\pi(b)) \longmapsto \pi(ab)$$

ist wohldefiniert: Sind $\langle b \rangle = \langle b' \rangle \in \mathrm{Grass}_k(n,d)$, so ist $b' = bc$ mit $c \in \mathrm{GL}_d\, k$ und $\langle ab' \rangle = \langle abc \rangle = \langle ab \rangle$. Außerdem ist sie transitiv: Ergänze Basen von $\langle b \rangle, \langle b' \rangle \in \mathrm{Grass}_k(n,d)$ zu Basen von k^n. Ist $a \in \mathrm{GL}_n\, k$ eine Transformationsmatrix für diese Basen, so gilt $b = ab'$.
Die Operationen

$$\bigwedge^d k^n \times \mathrm{GL}_d\, k \longrightarrow \bigwedge^d k^n; \Big(\sum_{i=1}^m \wedge b_i, a\Big) \longmapsto \sum_{i=1}^m \wedge b_i a\ ,$$

$$\mathrm{GL}_n\, k \times \bigwedge^d k^n \longrightarrow \bigwedge^d k^n; \Big(a, \sum_{i=1}^m \wedge b_i\Big) \longmapsto \sum_{i=1}^m \wedge a b_i\ ,$$

mit $b_i \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$ lassen sich zu Operationen von $\mathrm{Mat}_d\, k$ bzw. $\mathrm{Mat}_n\, k$ als multiplikative Monoide fortsetzen:

$$\bigwedge^d k^n \times \mathrm{Mat}_d\, k \longrightarrow \bigwedge^d k^n; \Big(\sum_{i=1}^m \wedge b_i, a\Big) \longmapsto \sum_{i=1}^m \wedge b_i a\ ,$$

$$\mathrm{Mat}_n\, k \times \bigwedge^d k^n \longrightarrow \bigwedge^d k^n; \Big(a, \sum_{i=1}^m \wedge b_i\Big) \longmapsto \sum_{i=1}^m \wedge a b_i\ .$$

Die Bilder liegen tatsächlich wieder in $\bigwedge^d k^n$, denn sind die Spalten von $b_i a$ bzw. ab_i linear unabhängig, so sind ihre Bilder unter $\wedge$ in $\bigwedge^d k^n$. Sind sie linear abhängig, so werden sie auf $0 \in \bigwedge^d k^n$ abgebildet. Ist

$$w = \sum_{i=1}^m \wedge b_i$$

und $a \in \mathrm{GL}_n\, k$, so schreibe diese Operation auch als

$$a \cdot w := \sum_{i=1}^m \wedge a b_i\ .$$

Bemerkung 2.5. Die Operation

$$\operatorname{Mat}_n k \times \bigwedge^d k^n \longrightarrow \bigwedge^d k^n;\ (a,w) \longmapsto a\cdot w$$

ist wieder eine Matrixoperation, d.h. es gilt

$$a \cdot w = \tilde{a}w$$

mit einer Matrix $\tilde{a} \in \operatorname{Mat}_N k$ mit $N = \binom{n}{d}$, und zwar

$$\tilde{a} := \Big(\det\big(a^M_{M'}\big)\Big)_{M',M},$$

wobei die Indizes $\mathcal{M}_{d,n}$ durchlaufen. Dabei bezeichnet $a^M_{M'}$ die $d \times d$-Matrix, die aus a entsteht, wenn man die Elemente mit Spaltenindex aus M und Zeilenindex aus M' auswählt, d.h.

$$a^M_{M'} := (a_{ij})_{\substack{i\in M'\\ j\in M}}.$$

Für diese Operation gilt

i) $(a_2a_1)\cdot w = a_2 \cdot (a_1 \cdot w)$,

ii) $a \cdot (\lambda w) = \lambda(a \cdot w)$,

iii) $(\lambda a)\cdot w = a \cdot \lambda^d w = \lambda^d(a \cdot w)$

mit $a, a_1, a_2 \in \operatorname{Mat}_n k$, $w \in \bigwedge^d k^n$ und $\lambda \in k$.

Beweis. Sei $a \in \mathrm{GL}_n k$ und $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von k^n. Dann liefert ae_i die i-te Spalte von a, und

$$a \cdot e_M = ae_{i_1} \wedge \ldots \wedge ae_{e_d} = \wedge a^M = \sum_{M'} \det a^M_{M'} e_{M'}$$

ist das Bild der Matrix aus den durch M ausgewählten Spalten von a unter $\wedge$. Dann gilt für $w = \sum_M p_M e_M$

$$a\cdot w = \sum_M p_M(a\cdot e_M) = \sum_{M,M'} p_M \det a^M_{M'} e_{M'},$$

und die Aussagen folgen. □

Proposition 2.6. *Für* $b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$ *und* $c \in \mathrm{GL}_d\, k$ *gilt*

$$\wedge bc = \det c \ \wedge b.$$

Beweis. Wegen $(bc)_M = b_M c$ gilt $\det(bc)_M = \det b_M \det c$, und die Behauptung folgt. $\square$

Proposition 2.7. *Für* $b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$ *und* $a \in \mathrm{GL}_n\, k$ *gilt*

$$\langle ab \rangle = \langle b \rangle \iff \wedge ab = \lambda \wedge b \ \text{ für ein } \lambda \in k^*.$$

Beweis. „ $\Longrightarrow$ ": Wegen $\langle ab \rangle = \langle b \rangle$ gibt es ein $c \in \mathrm{GL}_d\, k$ mit $ab = bc$, und deshalb folgt diese Richtung aus Proposition 2.6.
„ $\Longleftarrow$ ": Wähle eine Basis $c_1, \ldots, c_n$ von k^n so, daß $\langle c_1, \ldots, c_d \rangle = \langle b \rangle$ und $\langle c_{l+1}, \ldots, c_{l+d} \rangle = \langle ab \rangle$. Dann bilden die Vektoren $c_M := c_{i_1} \wedge \ldots \wedge c_{i_d}$ mit $M = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathcal{M}_d$ eine Basis von $\bigwedge^d k^n$. Wie in der ersten Beweishälfte gezeigt gibt es Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ mit $\wedge b = \lambda_1 c_1 \wedge \ldots \wedge c_d$ und $\wedge ab = \lambda_2 c_{l+1} \wedge \ldots \wedge c_{l+d}$. Da diese Vektoren nach Voraussetzung linear abhängig sind, muß $l = 0$ sein. $\square$

Korollar 2.8. *Seien* $a, b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$. *Dann gilt*

$$\langle a \rangle = \langle b \rangle \iff \wedge a = \lambda \wedge b \text{ für ein } \lambda \in k^*.$$

Beweis. Da $\mathrm{GL}_n\, k$ durch Linksmultiplikation transitiv auf $\mathrm{Grass}_k(n, d)$ operiert, folgt die Aussage mit Proposition 2.7. $\square$

Korollar 2.9. *Sei* K/k *eine Körpererweiterung und* $a, b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$. *Dann gilt*

$$K^* \wedge a = K^* \wedge b \quad \iff \quad \wedge a = \lambda \wedge b \ \text{mit}\ \lambda \in k^*.$$

Beweis. Aus $K^* \wedge a = K^* \wedge b$ folgt $\wedge a = \lambda \wedge b$ mit $\lambda \in K^*$. Fasse a, b als Elemente aus $\mathrm{St}_{n,d}\, K$ auf. Dann folgt nach Korollar 2.8 $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, also $a = bc$ mit $c \in \mathrm{Mat}_d\, K$. Da $a, b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$, ist $c \in \mathrm{Mat}_d\, k$, und nach Proposition 2.6 ist $\lambda = \det c \in k^*$. Die andere Schlußrichtung folgt aus Korollar 2.8. $\square$

Definition (Plücker-Einbettung). Die folgende Abbildung heißt *Plücker-Einbettung*:[27]

$$\begin{array}{rlcl} P: & \mathrm{Grass}_k(n, d) & \longrightarrow & \mathbf{P} \bigwedge^d k^n \\ & \langle a \rangle & \longmapsto & \overline{k}^* \wedge a \ = \ \overline{k}^* \sum\limits_{M \in \mathcal{M}_d} \det a_M e_M \ . \end{array}$$

[27] Zur Notation siehe Fußnote 20 und Anhang A.

Bemerkung 2.2 zeigt, daß für jedes $\langle a\rangle \in \mathrm{Grass}_k(n,d)$ das Bild tatsächlich in $\mathbf{P}\bigwedge^d k^n$ liegt, denn da stets $\det a_M \neq 0$ für ein M gilt, ist auch $\wedge a \neq 0$. Außerdem folgt aus den Korollaren 2.8 und 2.9, daß die Abbildung wohldefiniert und injektiv ist. Wie man leicht sieht, besteht das Bild genau aus den k-rationalen Punkten, die von einem zerlegbaren Vektor erzeugt werden, also

$$P\big(\,\mathrm{Grass}_k(n,d)\big) = \Big\{\overline{k}^{\,*}\wedge a \;\Big|\; a \in \mathrm{St}_{n,d}\,k\Big\}.$$

Definition (Plücker-Relationen). Sei ab hier $1 \le d < n$. Definiere in $k[x_N|_{N\in\mathcal{M}_d}]$, dem Polynomring in $\binom{n}{d}$ Variablen, für $M \in \mathcal{M}_{d-1}$ und $M' \in \mathcal{M}_{d+1}$ das Plücker-Polynom[28]

$$P_{M,M'}(x) := \sum_{j=0}^{d}(-1)^j x_{M,i_j} x_{M'-i_j}.$$

Die Relationen

$$P_{M,M'}(x) = 0$$

heißen *Plücker-Relationen.*

Definition (Grassmann-Varietät). Die gemeinsame Nullstellenmenge der Plücker-Polynome

$$V_k(n,d) := \mathrm{Z}\left(P_{M,M'}(x) \;\middle|\; M \in \mathcal{M}_{d-1}, M' \in \mathcal{M}_{d+1}\right) \subseteq \mathbf{P}^{\binom{n}{d}-1}$$

heißt *Grassmann-Varietät.*

Proposition 2.10. *Für jeden Zwischenkörper $\overline{k}\,/K/k$ gilt*[29]

$$V_k(n,d) \times_k K = V_K(n,d)\ .$$

Beweis. Da die Definition der Grassmann-Varietät nicht vom Grundkörper k abhängt, ändert sich auch die Polynommenge bei Skalarbereichswechsel nicht. $\square$

[28] Für Definitionen siehe Seite 11 und Seite 13 f., insbesondere Beispiel ii) . Zu Verallgemeinerungen siehe Seite 118 und Seite 137.

[29] Ist W ein k-Vektorraum, $\overline{k}$ ein fester algebraisch abgeschlossener Oberkörper und $\overline{k}\,/K/k$ ein Zwischenkörper, so gilt $\mathbf{P}W = \mathbf{P}(W \otimes_k K)$. Ist V eine über k definierte Varietät aus $\mathbf{P}W$, so wird mit $V \times_k K$ die Varietät V als über K definierte Varietät aus $\mathbf{P}(W \otimes_k K)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.11. Wegen Proposition 2.10 gilt für Körper $\overline{k}\,/K'/K/k$

$$V_k(n,d)(K') = V_K(n,d)(K')\ .$$

Satz 2.12. *Der Grassmann-Funktor ist darstellbar, und zwar gilt*

$$P\big(\operatorname{Grass}_K(n,d)\big) = V_k(n,d)(K)$$

für alle Zwischenkörper $\overline{k}\,/K/k$.

Beweis.[30] Es wird gezeigt, daß $P(\operatorname{Grass}_k(n,d)) = V_k(n,d)(k)$ gilt. Dann folgt die Behauptung mit Bemerkung 2.11.
Da das Bild von $\operatorname{Grass}_k(n,d)$ unter P genau aus den k-rationalen Punkten besteht, die von einem zerlegbaren Vektor erzeugt werden, reicht es zu zeigen:
Beh.: Sei $\overline{k}^*w \in \big(\mathbf{P}\bigwedge^d k^n\big)(k)$ ein k-rationaler Punkt. Dann gilt

$$w \text{ zerlegbar} \iff P_{M,M'}(w) = 0 \quad \forall M, M'.$$

„$\Longrightarrow$": Sei $\overline{k}^*w \in \mathbf{P}\bigwedge^d k^n(k)$ ein k-rationaler Punkt, also $w = \sum_M p_M e_M$ mit $p_M \in k$. Definiere[31] für $M \in \mathcal{M}_{d-1}$

$$w^M := \sum_{j=1}^n p_{M,j} e_j .$$

Dann gilt für das Produkt

$$\begin{aligned} w^M \wedge w &= \sum_{M' \in \mathcal{M}_d} \sum_{j=1}^n p_{M,j} p_{M'} \underbrace{(e_j \wedge e_{M'})}_{\substack{=\ 0 \text{ falls } j \in M' \\ =\ e_{j,M'} \text{ sonst}}} \\ &= \sum_{\substack{M' \in \mathcal{M}_{d+1} \\ M' = (i_0,\dots,i_d)}} \sum_{j=0}^d (-1)^j p_{M,i_j} p_{M'-i_j} e_{M'} \\ &= \sum_{M' \in \mathcal{M}_{d+1}} P_{M,M'}(w) e_{M'}\ . \end{aligned} \tag{$*$}$$

Falls $w = u_1 \wedge \ldots \wedge u_d$ zerlegbar ist, dann ist w^M in $\langle u_1, \ldots, u_d \rangle$ enthalten,

[30] Der Beweis folgt leicht modifiziert der Darstellung von Jacobson [22], chap. 3.4.
[31] Für $p_{M,j} := p_{M,\{j\}}$ siehe die Definition auf Seite 13 und das darauffolgende Beispiel.

denn mit $u_j = \sum_i a_{ij} e_i$ und $a = (a_{ij})_{ij}$ ist wegen $\det a_{M,j} = \det a_{M+j}$

$$w^M = \sum_{i=1}^{n} \det a_{M+i} e_i \ , \quad \text{wobei } a_{M+i} := \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_{d-1} 1} & \dots & a_{i_{d-1} d} \\ a_{i1} & \dots & a_{id} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} (-1)^{d+j} a_{ij} \det a_M^{-(j)} e_i \ , \quad \text{wobei } a_M^{-(j)} = (a_{l\nu})_{\substack{l \in M \\ \nu \neq j}}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} (-1)^{d+j} \det a_M^{-(j)} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

$$= \sum_{j=1}^{d} (-1)^{d+j} \det a_M^{-(j)} \ u_j \ .$$

Dann sind aber $u_1, \dots, u_d, w^M$ linear abhängig, und es ist $w^M \wedge w = 0$. Also ist wegen $(*)$ auch $P_{M,M'}(w) = 0$ für alle M, M'.
„$\Longleftarrow$": Sei $\overline{k}^* w \in \left(\mathbf{P} \bigwedge^d k^n\right)(k)$ mit $w = \sum p_M e_M$ $(p_M \in k)$ und $P_{M,M'}(w) = 0$ für alle M, M'. Da $w \neq 0$, existiert ein M mit $p_M \neq 0$. Sei dies o.B.d.A. für $M_1 = \{1, \dots, d\}$ erfüllt. Definiere[32] für jedes $j \in M_1$

$$v_j := w^{M_1 - j} = \sum_{i=1}^{n} p_{M_1 - j, i} e_i \ .$$

Die Vektoren $v_1, \dots, v_d$ sind linear unabhängig, da $p_{M_1-j,i} = 0$ für $i \neq j$ mit $i \leq d$ ist und nach Voraussetzung $p_{M_1-j,j} = (-1)^{j-1} p_{M_1} \neq 0$ gilt. Also ist

$$v := v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \neq 0.$$

Beh.: $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in k^*$.
Ergänze $v_1, \dots, v_d$ zu einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von k^n. Damit ist

$$\bigwedge^d k^n = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}_d} k v_M \text{ mit } v_M := v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d} \ ,$$

und w läßt sich bezüglich dieser Basis darstellen durch

$$w = \sum_M q_M v_M \text{ mit } q_M \in k.$$

[32] Schreibe abkürzend $p_{M_1-j,i}$ für $p_{M_1-\{j\},\{i\}}$ usw.

Ann.: $q_{M'} \neq 0$ für ein $M' \neq M_1$. Dann gibt es ein $j \in M_1$ mit $j \notin M'$. Einerseits folgt nun nach $(*)$, daß

$$v_j \wedge w \;=\; \sum_{M \in \mathcal{M}_{d+1}} P_{M_1-j,M}(w)e_M \;=\; 0,$$

da die Relationen $P_{M,M'}(w) = 0$ erfüllt sind, andererseits folgt aus obiger Annahme, daß

$$v_j \wedge w \;=\; \sum_{M \in \mathcal{M}_d} q_M(v_M \wedge v_j) \;\neq\; 0,$$

denn die Koordinate zu M' ist ungleich Null: Zunächst ist $q_{M'} \neq 0$. Dann sind, weil $j \notin M'$, die Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}, v_j$ linear unabhängig. Deshalb ist auch $v_{M'} \wedge v_j \neq 0$.
Also ist $w = q_{M_1}v$.

□

2.3 Plücker-Relationen

Da man der Definition der Plücker-Polynome nicht direkt ansieht, wie komplex das resultierende Gebilde ist, werden in diesem Abschnitt neben einigen Beispielen Aussagen betrachtet, die die Anzahl der definierenden Polynome einer Grassmann-Varietät betreffen.

Beispiel.

1) $\mathbf{V_k(4,2)}$: Schreibe die Indizes $M = (1234)$ als 1234 usw. Dann ergibt sich aus der allgemeinen Definition der Polynome

$$\begin{aligned} P_{M,M'}(x) :=& \sum_{j=0}^{d} (-1)^j x_{M,i_j} x_{M'-i_j} \\ =& x_{M,i_1}x_{M'-i_1} - x_{M,i_2}x_{M'-i_2} + x_{M,i_3}x_{M'-i_3} \end{aligned}$$

in diesem Fall

$$\begin{aligned} P_{1,123}(x) &= \underbrace{x_{1,1}}_{=0} x_{23} - x_{12}x_{13} + x_{13}x_{12} = 0 \\ P_{2,123}(x) &= P_{3,123}(x) = P_{1,124}(x) = \ldots = 0 \\ P_{1,234}(x) &= x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} \\ P_{2,134}(x) &= -x_{12}x_{34} - x_{23}x_{14} + x_{24}x_{13} \\ P_{3,124}(x) &= -x_{13}x_{24} + x_{23}x_{14} + x_{34}x_{12} \\ P_{4,123}(x) &= -x_{14}x_{23} + x_{24}x_{13} - x_{34}x_{12}, \end{aligned}$$

d.h.

$$V_k(4,2) = \mathrm{Z}\left\{x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}\right\} \subseteq \mathbf{P}^5.$$

2) $\mathbf{V_k(n,1)}$: Hier verschwinden alle definierenden Polynome, da $M = \emptyset$:

$$P_{\emptyset,(i,j)}(x) := x_i x_j - x_j x_i = 0.$$

Dies ist auch nicht verwunderlich, denn die Plückereinbettung bildet die Geraden durch Null von k^n bijektiv auf die k-rationalen Punkte von $\mathbf{P}k^n$ ab:

$$k^n \supseteq kv \longmapsto \overline{k}^{\,*} \sum_{M \in \mathcal{M}_1} \det v_M e_M = \overline{k}^{\,*} \sum_{i=1}^{d} v_i e_{(i)} \in \mathbf{P}k^n(k).$$

Also

$$V_k(n,1) = \mathbf{P}^{n-1}.$$

Komplexität

Bei diesen Beispielen hat sich die Zahl der definierenden Polynome von Grassmann-Varietäten dadurch stark reduziert, daß viele trivial oder identisch waren. Die Hoffnung, daß dies allgemein so ist, wird durch die folgenden Betrachtungen enttäuscht werden.
Sei $M \in \mathcal{M}_{d-1,n}$ und $M' \in \mathcal{M}_{d+1,n}$. In der Summe

$$P_{M,M'}(x) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j x_{M,i_j} x_{M'-i_j}$$

können maximal zwei Summanden bis auf das Vorzeichen gleich sein. Gelte dies für $j = j_1$ und $j = j_2$. Sei der Übersicht halber $l_1 := i_{j_1}$ und $l_2 := i_{j_2}$ mit $l_1 < l_2$. In diesem Fall gilt

$$M \cup l_1 = M' - l_2 \ \text{ und } \ M \cup l_2 = M' - l_1.$$

Deshalb muß M' von der Form $M \cup (l_1, l_2)$ sein, d.h. $M \subseteq M'$. Wegen $l_1 < l_2$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{pos}(l_1, M \cup l_1) &= \mathrm{pos}(l_1, M') \\ \mathrm{pos}(l_2, M \cup l_2) &= \mathrm{pos}(l_2, M') - 1. \end{aligned}$$

Nun gilt allgemein

$$(-1)^j = -(-1)^{\mathrm{pos}(i_j,M')}$$

und

$$\mathrm{sign}\,\pi_{M+i_j} = (-1)^d(-1)^{\mathrm{pos}(i_j,M\cup i_j)}.$$

Damit haben die Summanden

$$(-1)^{j_\nu} x_{M,l_\nu} x_{M'-l_\nu} = (-1)^{j_\nu}\,\mathrm{sign}\,\pi_{M+l_\nu} x_{M\cup l_1} x_{M\cup l_2}$$

$(\nu = 1,2)$ das Vorzeichen

$$\begin{aligned}(-1)^{j_\nu}\,\mathrm{sign}\,\pi_{M+l_\nu} &= -(-1)^{\mathrm{pos}(l_\nu,M')}(-1)^d(-1)^{\mathrm{pos}(l_\nu,M\cup l_\nu)}\\ &= -(-1)^d(-1)^{\mathrm{pos}(l_\nu,M')}(-1)^{\mathrm{pos}(l_\nu,M')+\left\{\begin{smallmatrix}0, \text{ falls } \nu=1\\ 1, \text{ falls } \nu=2\end{smallmatrix}\right.}\\ &= -\epsilon_\nu(-1)^d(-1)^{2\,\mathrm{pos}(l_\nu,M')}\\ &= -\epsilon_\nu(-1)^d \quad \text{mit } \epsilon_\nu := \begin{cases}1, \text{ falls } \nu = 1\\ -1, \text{ falls } \nu = 2\end{cases},\end{aligned}$$

d.h. es ist immer verschieden. Da alle anderen Summanden gleich Null sind, folgt

Proposition 2.13. *$P_{M,M'}(x)$ Nullpolynom* $\iff$ $M \subseteq M'$.

Seien $P_{M_1,M_1'}, P_{M_2,M_2'}$ mit $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{d-1}$ und $M_1', M_2' \in \mathcal{M}_{d+1}$ nichttrivial und bis auf das Vorzeichen[33] gleich. Für alle $i \in M_1' - M_1$ muß es ein $j(i) \in M_2' - M_2$ geben, so daß eine der beiden Aussagen erfüllt ist:

i) $M_1 \cup i = M_2 \cup j(i)$ und $M_1' - i = M_2' - j(i)$ oder

ii) $M_1 \cup i = M_2' - j(i)$ und $M_1' - i = M_2 \cup j(i)$.

Aus Proposition 2.13 folgt, daß $|M_1' - M_1| > 2$. Seien i_1, i_2, i_3 verschiedene Elemente aus $M_1' - M_1$ und $j_\nu := j(i_\nu), \nu = 1,2,3$.
Sei i) für i_1 erfüllt. Dann folgt

$$M_1 = M \cup j_1 \text{ und } M_2 = M \cup i_1 \text{ mit } M := M_1 \cap M_2.$$

Wäre i) ebenfalls für i_2 erfüllt, so müßte

$$M_1 = M \cup j_2 \text{ und } M_2 = M \cup i_2$$

[33] Das Vorzeichen kann vernachlässigt werden, da nur die Relationen $P_{M,M'}(x) = 0$ von Interesse sind.

gelten, also $i_1 \in M \subseteq M_1$, ein Widerspruch.
Sei ii) für i_1 erfüllt. Dann folgt

$$M_2' = M_1 \cup (i_1, j_1) \text{ und } M_2 = M_1' \cup (i_1, j_1).$$

Sei ii) auch für i_2 erfüllt. Dann folgt

$$M_2' = M_1 \cup (i_1, j_1) = M_1 \cup (i_2, j_2),$$

also $i_2 = j_1$ und $j_2 = i_1$. Für i_3 kann nun ii) nicht mehr erfüllt sein.
Die Aussage i) kann also für maximal ein Element und die Aussage ii) für maximal zwei Elemente aus $M_1' - M_1$ erfüllt sein. Die Überlegungen führen zur

Proposition 2.14. *Für nichttriviale Polynome $P_{M_1,M_1'}$ und $P_{M_2,M_2'}$ mit M_1, $M_2 \in \mathcal{M}_{d-1}$ bzw. $M_1', M_2' \in \mathcal{M}_{d+1}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $P_{M_1,M_1'} = \pm P_{M_2,M_2'}$.

ii) Es gibt einen Index $M \in \mathcal{M}_{d-2}$ und Zahlen $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$, die nicht in M liegen, mit

$$\begin{aligned} M_1 &= M \cup (i_1)\ ,\ M_2' = M_1 \cup (i_3, i_4), \\ M_2 &= M \cup (i_2)\ ,\ M_1' = M_2 \cup (i_3, i_4). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.15. Von den

$$n_P(n,d) := \binom{n}{d-1}\binom{n}{d+1}$$

Möglichkeiten, Plücker-Polynome zu bilden, führen

$$n_0(n,d) := \binom{n}{d-1}\binom{n-(d-1)}{2}$$

zu trivialen Relationen. Zu gleichen Relationen können nur Indizes der Form

$$M_1 = M \cup (i_1)\ ,\ M_1' = M \cup (i_2, i_3, i_4)\ ,\ M \in \mathcal{M}_{d-2}$$

führen. Davon gibt es $4n_g(n,d)$ mit

$$n_g(n,d) := \binom{n}{d-2}\binom{n-(d-2)}{4}$$

und jeweils 4 sind gleich. Die Grassmann-Varietät wird also in der Definition durch Plücker-Relationen durch

$$n_d := n_P(n,d) - n_0(n,d) - 3n_g(n,d)$$

Relationen beschrieben.

Für $V_k(n,1)$ erhält man

$$n_P(n,1) = \binom{n}{0}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$n_0(n,1) = \binom{n}{0}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

d.h. alle Polynome sind, wie bereits festgestellt, trivial. Für $V_k(4,2)$ ergibt sich

$$n_P(4,2) = \binom{4}{1}\binom{4}{3} = 16,$$
$$n_0(4,2) = \binom{4}{1}\binom{3}{2} = 12,$$
$$n_g(4,2) = \binom{4}{0}\binom{4}{4} = 1,$$

d.h. von den 16 möglichen sind 12 Relationen trivial, und die restlichen 4 sind gleich. In folgender Tabelle sind einige Werte angegeben, um zu zeigen, wie schnell die Zahl der definierenden Gleichungen wächst. Die Fälle $V(d^2, \mu d)$ werden später von besonderem Interesse sein.

	n_P	n_0	n_g	n_d
V(4,2)	16	12	1	1
V(5,2)	50	30	5	5
V(6,2)	120	60	15	15
V(9,2)	756	252	126	126
V(9,3)	4536	756	630	1890
V(9,4)	10584	1260	1260	5544
V(16,2)	8960	1680	1820	1820
V(16,4)	2446080	43680	120120	2042040

Vor allem die letzte Zeile zeigt deutlich, daß der reduzierende Einfluß immer stärker nachläßt und daß die Zahl der definierenden Gleichungen gegen $n_P(n,d)$ strebt.

Allerdings wurden in dieser Untersuchung lediglich triviale und mehrfach auftretende Relationen eliminiert. Möglicherweise auftretende algebraische Abhängigkeiten unter den Gleichungen können dazu führen, daß die Zahl der Relationen, die eine Grassmann-Varietät beschreiben, weit geringer ist, als die hier angegebene.

2.4 Umkehrung der Plücker-Einbettung

In vielen Situationen wird es später hilfreich sein, eine Abbildung in konkreter Form zu haben, die die Plücker-Einbettung umkehrt. Diese Abbildung wird in diesem Abschnitt beschrieben.
Die affinen offenen Mengen

$$U_M := \mathbf{P} \bigwedge^d k^n - \mathrm{Z}(x_M) \quad (M \in \mathcal{M}_{d,n})$$

bilden eine Überdeckung von $\mathbf{P} \bigwedge^d k^n$. Definiere für jedes $M \in \mathcal{M}_d$ eine Funktion

$$P_M^* : V_k(n,d) \cap U_M \longrightarrow \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k}\,;\ p \mapsto a$$

durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = i_j \\ 0 & \text{falls } i \in M \text{ und } i \neq i_j \\ \frac{p_{M_{i,j}}}{p_M}(-1)^{j+\mathrm{pos}(i,M_{ij})} & \text{falls } i \notin M \end{cases}$$

mit $M = (i_1, \dots, i_d)$ und

$$M_{i,j} := (i) \cup M - (i_j),$$

wobei $p = \sum_M p_M e_M \in \overline{k}$. Die Matrix a ist wegen $\det a_M = 1$ aus $\mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k}$.

Proposition 2.16.

i) Die Abbildungen

$$\pi \circ P_M^* : V_k(n,d) \cap U_M \longrightarrow \mathrm{Grass}_{\overline{k}}(n,d); p \longmapsto \langle P_M^*(p) \rangle$$

sind Rechtsinverse der Plücker-Einbettung, d.h. es gilt

$$P \circ \pi \circ P_M^*(p) = p \ \ \textit{für alle } p \in V_k(n,d) \cap U_M.$$

ii) Die Abbildungen $\pi \circ P_M^*$ sind miteinander verträglich, d.h.

$$p \in V_k(n,d) \cap U_M \cap U_N \implies \pi \circ P_M^*(p) = \pi \circ P_N^*(p).$$

iii) Sie induzieren eine zu P inverse Abbildung

$$P^{-1} : V_k(n,d) \longrightarrow \mathrm{Grass}_{\overline{k}}(n,d).$$

iv) Ist $\overline{k}\,/K/k$ eine Zwischenerweiterung von $\overline{k}\,/k$, so liegen die Bilder von K-rationalen Punkten aus $V_k(n,d)$ unter P_M^* in $\mathrm{St}_{n,d}\,K$.

Beweis. i) Sei $p \in V_k(n,d) \cap U_M$ mit $p = \sum_M p_M e_M$. Ist $\langle a \rangle \in \mathrm{Grass}_{\overline{k}}(n,d)$ mit $a \in \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k}$ ein Urbild von p unter P, so ist $\det a_M \neq 0$ und $b := a_M^{-1} \in \mathrm{GL}_d\,\overline{k}$. Dann ist $ab \in \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k}$ und $\langle a \rangle = \langle ab \rangle$, da die Spalten von ab nur Linearkombinationen der Spalten von a sind, und der Rang beider Matrizen gleich ist. Deshalb ist $\det((ab)_N) = \alpha p_N$ für ein $\alpha \in \overline{k}^{\,*}$ und für alle $N \in \mathcal{M}_d$. Die Matrix ab ist etwa für $M = (1,\ldots,d)$ von der Form

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ c_{d+1,1} & \cdots & c_{d+1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,d} \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $c_{i,j} \in \overline{k}$. Da für $i \notin M$ und $1 \leq j \leq d$

$$\det((ab)_{M_{ij}}) = \det((ab)_{\{i\}\cup M-\{j\}}) = c_{i,j}(-1)^{j+\mathrm{pos}(i,M_{ij})}$$

gilt, und $\det((ab)_M) = 1$, lassen sich die Koeffizienten $c_{i,j}$ durch die Koordinaten p_N in der oben angegebenen Weise ausdrücken:

$$\frac{p_{M_{ij}}}{p_M}(-1)^{j+\mathrm{pos}(i,M_{ij})} = \frac{\alpha^{-1}\det((ab)_{M_{ij}})}{\alpha^{-1}\det((ab)_M)}(-1)^{j+\mathrm{pos}(i,M_{ij})} = c_{i,j}\,.$$

Es folgt also $ab = P_M^*(p)$ und $p = P(\langle ab \rangle) = P \circ \pi \circ P_M^*(p)$.
ii) u. iii) Da P insbesondere injektiv ist, sind die Abbildungen $\pi \circ P_M^*$ in oben angegebener Weise miteinander verträglich und definieren eine Abbildung P^{-1} von ganz $V_k(n,d)$ nach $\mathrm{Grass}_{\overline{k}}(n,d)$, die die inverse Abbildung zu P ist.
iv) Klar. □

Beispiel. Zu der Plücker-Einbettung

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathrm{Grass}_k(9,3) & \longrightarrow & \mathbf{P}\bigwedge^3 k^9 \\ & \langle a \rangle & \longmapsto & \overline{k}^{\,*}\wedge a \end{array}$$

sieht die Umkehrung

$$P_{123}^* : V_k(9,3)\cap U_{123} \longrightarrow \mathrm{St}_{9,3}\,\overline{k}\,;\; p = \sum_M p_M e_M \longmapsto a$$

folgendermaßen aus:

$$p \longmapsto \frac{1}{(p_{123})^3} \left(\begin{array}{ccc} p_{123} & 0 & 0 \\ 0 & p_{123} & \\ 0 & 0 & p_{123} \\ \hline p_{234} & -p_{134} & p_{124} \\ p_{235} & -p_{135} & p_{125} \\ p_{236} & -p_{136} & p_{126} \\ \hline p_{237} & -p_{137} & p_{127} \\ p_{238} & -p_{138} & p_{128} \\ p_{239} & -p_{139} & p_{129} \end{array} \right) .$$

Geometrische Eigenschaften der Abbildungen P_M^* werden im Abschnitt 3.4 betrachtet.

Kapitel 3

Darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten

Brauer-Severi-Varietäten lassen sich folgendermaßen beschreiben: Sei k ein Körper und A eine zentraleinfache k-Algebra der k-Dimension d^2. Sei BS_A die Menge aller Linksideale von A mit k-Dimension d. Betrachte A als k-Vektorraum und BS_A als eine Teilmenge von $\mathrm{Grass}_k(A, d)$. Dann ist das Bild von BS_A unter der Plücker-Einbettung $P(\mathrm{BS}_A)$ eine Teilmenge der Grassmann-Varietät. Es läßt sich zeigen, daß die Menge $P(\mathrm{BS}_{A\otimes_k \overline{k}})$ Zariski-abgeschlossen, d.h. eine projektive Varietät V_A ist, und daß für alle Zwischenerweiterungen $\overline{k}\,/K/k$ das Bild von $\mathrm{BS}_{A\otimes_k K}$ unter P den K-rationalen Punkten von V_A bijektiv entspricht. Diese Varietät ist die Brauer-Severi-Varietät zu A. Blanchet verallgemeinert dieses Konzept in [5], indem sie die Menge $\mathrm{BS}_{A,\mu}$ der Linksideale[34] der Dimension μd betrachtet.
In beiden Fällen werden Teilmengen von $\mathrm{Grass}_k(A, \nu)$ betrachtet, die einer Invarianzbedingung genügen, nämlich die Menge aller $U \in \mathrm{Grass}_k(A, \nu)$ mit $AU \subseteq U$. Tatsächlich muß man sich dabei gar nicht auf einseitige Multiplikationen beschränken, sondern kann allgemein für eine beliebige k-Algebra A eine k-Darstellung $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ von A betrachten. Diese induziert durch die Isomorphie $\mathrm{End}(k^n) \cong \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Operation von A auf dem k-Vektorraum k^n, die zu einer entsprechenden Invarianzbedingung $AU \subseteq U$ für Untervektorräume $U \leq k^n$ führt. Die Menge der dadurch ausgewählten Untervektorräume läßt sich durch die Plücker-Einbettung in einen projektiven Raum abbilden, und es kann gezeigt werden, daß auch diese Menge über $\overline{k}$ eine projektive Varietät ist.
Diese darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten werden im ersten Abschnitt vorgestellt. Dann wird anhand von drei Beispielen gezeigt, wie sich

[34] Tatsächlich werden in [5], wie von einigen anderen Autoren, Rechtsideale betrachtet.

bestehende Konstruktionen in diesen Rahmen einfügen. In den Abschnitten 3.4 und 3.5 werden weitere Eigenschaften bewiesen. Einige Beweise konnten aus der üblichen Theorie der Brauer-Severi-Varietäten übertragen werden, etwa aus Jacobson [22], chap. III, oder Blanchet [5]. Allerdings sind die meist knappen Ausführungen hier wesentlich detaillierter wiedergegeben. Insbesondere wird die nicht immer übliche begriffliche Trennung von „Menge von Untervektorräumen“ und ihrem Bild unter der Plücker-Einbettung konsequent eingehalten.
Der hier eingenommene Blickwinkel legt es nahe, die oben erwähnte Invarianzbedingung als Eigenwertproblem gewisser Matrizen zu deuten. Dieser Ansatz wird im Abschnitt 3.3 vorgestellt und im Verlauf der Arbeit mehrfach wieder aufgegriffen.
Viele Ergebnisse aus der Theorie der Brauer-Severi-Varietäten stützen sich auf die Einfachheit der zugrundeliegenden Algebra. Sie fehlen hier und werden im nächsten Kapitel dargestellt.

3.1 Definition und erste Eigenschaften

Sei k ein Körper und A eine beliebige k-Algebra. Im folgenden werden nur Algebren betrachtet, die von invertierbaren Elementen erzeugt werden. Diese Einschränkung ist notwendig, wie sich zeigen wird, um bestimmte Eigenschaften der Algebra in die dazugehörige Grassmann-Algebra zu transferieren. Zum Beispiel werden alle zentraleinfachen Algebren von invertierbaren Elementen erzeugt (siehe Lemma 4.3).
Sei $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine lineare k-Darstellung von A, also ein k-Algebrahomomorphismus (im weiteren nur noch *Darstellung* oder *k-Darstellung* genannt). Dann operiert A auf k^n durch[35]

$$A \times k^n \longrightarrow k^n;\ (\alpha, u) \longmapsto\ \alpha_\theta u := \alpha u := \theta(\alpha)u.$$

Sei $d \leq n$ eine natürliche Zahl. Definiere die Menge der θ-invarianten d-dimensionalen k-Untervektorräume von k^n:

$$\mathrm{Grass}_{\theta/k}(n,d) := \Big\{ U \leq k^n\ k\text{-UVR} \ \Big|\ \dim_k U = d \wedge AU \subseteq U \Big\}.$$

Ist K/k eine Körpererweiterung, so ist

$$\theta_K : A \otimes_k K \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k \otimes_k K \cong \mathrm{Mat}_n\, K;\ \alpha \otimes \lambda \longmapsto \theta(\alpha) \otimes \lambda$$

[35]Verwende gewöhnlich die Schreibweise „αu“ oder, wenn der Matrixaspekt wichtig wird, „$\theta(\alpha)u$“. Wenn es verschiedene Operationen von A auf k^n gibt, ist die Schreibweise „$\alpha_\theta u$“ günstig.

eine K-Darstellung von $A \otimes_k K$.
Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von k^n und $(e_M \mid M \in \mathcal{M}(n))$ die induzierte Basis der Grassmann-Algebra $\bigwedge k^n$. Die Operation von A auf k^n läßt sich auf $\bigwedge k^n$ fortsetzen[36] durch

$$\alpha \cdot w := \sum_i \alpha u_{i,1} \wedge \ldots \wedge \alpha u_{i,r_i}$$

für $w = \sum_i u_{i,1} \wedge \ldots \wedge u_{i,r_i} \in \bigwedge k^n$ und $\alpha \in A$. Ist

$$w = \sum_{M \in \mathcal{M}_r} p_M e_M \in \bigwedge^r k^n \ ,$$

so läßt sich diese Operation mit $\theta(\alpha) = a = (a_{ij})_{ij}$ schreiben als[37]

$$\alpha \cdot w = \sum_M p_M(\alpha \cdot e_M) = \sum_{M,M'} p_M \det a^M_{M'} e_{M'} \ . \qquad (*)$$

Satz 3.1. *Der Funktor*

$$\mathcal{G}(k) \longrightarrow \mathcal{SET};\ K \longmapsto \mathrm{Grass}_{\theta_K/K}(n,d)$$

ist darstellbar durch eine projektive Varietät.

Beweis. Es wird gezeigt, daß das Bild $P(\mathrm{Grass}_{\theta/k}(n,d))$ unter der Plücker-Einbettung aus den k-rationalen Punkten einer projektiven Varietät besteht. Mit der nachgestellten Proposition 3.2 folgt dann die Behauptung.
Sei $T \subseteq A$ eine Menge invertierbarer Elemente, so daß $A = k[T]$ ist. Dann gilt für $U \in \mathrm{Grass}_k(n,d)$[38]

$$AU \subseteq U \Longleftrightarrow TU = U,$$

denn:
„ $\Longrightarrow$ ": Klar, da $T \subseteq A$ und alle $\alpha \in T$ invertierbar sind.
„ $\Longleftarrow$ ": Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ und $\lambda \in k^*$, so ist

$$\lambda \alpha_1 U = \lambda U = U,$$
$$\alpha_1 \alpha_2 U = \alpha_1 U = U,$$

---

[36] Vgl. Bemerkung 2.5.
[37] Vgl. Bemerkung 2.5.
[38] An dieser Stelle wird benötigt, daß die Algebra A durch invertierbare Elemente erzeugt werden kann.

und für $u \in U$ ist

$$(\alpha_1+\alpha_2)u = \alpha_1 u+\alpha_2 u \in U \Longrightarrow (\alpha_1+\alpha_2)U \subseteq U.$$

Ist $U = \langle a\rangle \leq k^n$ ein d-dimensionaler k-Untervektorraum mit $a \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$ und $w := \wedge a$, so gilt wegen der Injektivität der Plücker-Einbettung und Korollar 2.9

$$AU \subseteq U \Longleftrightarrow TU = U \Longleftrightarrow \alpha \cdot \overline{k}^* w = \overline{k}^* w \quad \forall\ \alpha \in T.$$

Mit $T_\alpha(M, M') := \det \theta(\alpha)^M_{M'} \in k$ gilt nach $(*)$:

$$\alpha \cdot e_M = \sum_{M' \in \mathcal{M}_d} T_\alpha(M, M') e_{M'} \quad \text{für } \alpha \in T, M \in \mathcal{M}_d.$$

Ist $w := \sum_{M \in \mathcal{M}_d} p_M e_M$ und $\alpha \in T$, so gilt nach Korollar 2.9

$$\alpha \cdot \overline{k}^* w = \overline{k}^* w \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \cdot w = \lambda_\alpha w \text{ mit } \lambda_\alpha \in k^*$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot \overline{k}^* w = \overline{k}^* w \\
&\Longleftrightarrow \sum_{M,M'} p_M T_\alpha(M, M') e_{M'} = \lambda_\alpha \sum_M p_M e_M \text{ für Werte } \lambda_\alpha \in k^* \\
&\Longleftrightarrow p_M^{-1} \sum_{M'} p_{M'} T_\alpha(M', M) = \lambda_\alpha\ \forall M \in \mathcal{M}_d \text{ für Werte } \lambda_\alpha \in k^* \\
&\Longleftrightarrow p_M^{-1} \sum_{M'} p_{M'} T_\alpha(M', M) = p_N^{-1} \sum_{N'} p_{N'} T_\alpha(N', N)\ \forall M, N,
\end{aligned}$$

d.h. ein k-rationaler Punkt aus dem Bild $P\big(\mathrm{Grass}_k(n, d)\big)$ ist genau dann in $P\big(\mathrm{Grass}_{\theta/k}(n, d)\big)$, wenn er Nullstelle aller Polynome

$$B^\alpha_{M,N}(x) := x_N \sum_{M'} x_{M'} T_\alpha(M', M) - x_M \sum_{N'} x_{N'} T_\alpha(N', N)$$

ist. $P\big(\mathrm{Grass}_{\theta/k}(n, d)\big)$ besteht also genau aus den k-rationalen Punkten, die gemeinsame Nullstellen der Plücker-Relationen und obiger Polynome sind.

□

Definition. Die im Beweis verwendeten Polynome

$$B^{\alpha}_{M,N}(x) := x_N \sum_{M'} x_{M'} T_\alpha(M', M) - x_M \sum_{N'} x_{N'} T_\alpha(N', N)$$

definieren eine Varietät

$$\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d) := \mathrm{Z}\left(\left\{B^{\alpha}_{M,N}(x) \mid M, N \in \mathcal{M}_d, \alpha \in T\right\}\right),$$

die *Invarianzvarietät* der Darstellung θ bezüglich T. Die Varietät

$$V_{\theta/k}(n,d) := V_k(n,d) \cap \mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d)$$

heißt *darstellungsinvariante* oder *θ-invariante Grassmann-Varietät.* Man erhält somit für einen Zwischenkörper $\overline{k}\,/K/k$

$$P(\mathrm{Grass}_{\theta_K/K}(n,d)) = V_{\theta/k}(n,d)(K).$$

Hier zeigt sich, warum in dieser Arbeit die Bezeichnung „Varietät" etwas weiter gefaßt ist, als bei einigen Autoren üblich: Die genannten Mengen sind zwar abgeschlossen, aber nicht unbedingt irreduzibel.[39]
Die Symbole erhalten dadurch ihre Berechtigung, daß zwar $V_{\theta/k}(n,d)$ unabhängig von der Wahl der Menge T ist, $\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d)$ jedoch im allgemeinen nicht.[40] Die Unabhängigkeit für $V_{\theta/k}(n,d)$ folgt aus dem Beweis von Satz 3.1, läßt sich aber auch folgendermaßen einsehen:
Ist T' eine weitere Menge invertierbarer Elemente mit $A = k[T']$, so lassen sich alle Elemente $\alpha' \in T'$ schreiben als Summe von Produkten von Elementen aus T und Skalaren. Zu zeigen ist, daß für bezüglich T invariante Elemente $\bar{k}^*w$ mit zerlegbarem w auch wieder $\alpha' \cdot w = \lambda w$ $(\lambda \in \bar{k}^*)$ gilt. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in T$, so gilt für beliebiges $\overline{k}^{\,*}w \in \mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d)$ mit $\alpha_i \cdot w = \lambda_i w$ und $\lambda \in k^*$

$$(\lambda\alpha_1) \cdot w = \lambda^d \lambda_1 w,$$
$$(\alpha_1\alpha_2) \cdot w = \alpha_1 \cdot \lambda_2 w = \lambda_1\lambda_2 w.$$

Es fehlt die entsprechende Aussage für die Summe $\alpha_1 + \alpha_2$. Ist $\overline{k}^{\,*}w \in V_{\theta/k}(n,d)$, d. h. ist w zerlegbar, so läßt sich die Aussage in eine Aussage

[39] Bei Hartshorne [15] wird mit projektiver Varietät eine abgeschlossene Teilmenge eines projektiven Raums bezeichnet, die irreduzibel ist, d. h. die sich nicht als Vereinigung zweier abgeschlossener echter Teilmengen schreiben läßt. Bei Brodmann [7] und Shafarevich [41] gibt es diese Beschränkung nicht.

[40] Siehe etwa das Beispiel auf Seite 43.

über die korrespondierenden Untervektorräume überführen: Für $w = \wedge a$ mit $a \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$ ist zu zeigen:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\langle a \rangle = \langle a \rangle, \text{ falls } \alpha_1 + \alpha_2 \text{ invertierbar.}$$

Eine Inklusion folgt sofort:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\langle a \rangle = \Big\{ \underbrace{\alpha_1 v}_{\in \langle a \rangle} + \underbrace{\alpha_2 v}_{\in \langle a \rangle} \Big| v \in \langle a \rangle \Big\} \subseteq \langle a \rangle.$$

Gleichheit folgt aus Lemma 2.3 i), da wegen der Invertierbarkeit von $\alpha_1 + \alpha_2$ das Bild $\theta(\alpha_1 + \alpha_2)$ in $\mathrm{GL}_n\, k$ liegt.

Proposition 3.2. *Für Zwischenkörper $\overline{k}\,/K/k$ gilt*

i) $\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n, d) \times_k K = \mathrm{Inv}^T_{\theta_K/K}(n, d)$,

ii) $V_{\theta/k}(n, d) \times_k K = V_{\theta_K/K}(n, d)$.

Beweis. Ist $A = k[T]$, so ist $A \otimes_k K = K[\alpha \otimes 1_K \mid \alpha \in T]$ und

$$(\alpha \otimes 1_K) \cdot (e_M \otimes 1_K) = \left(\sum_{M'} T_\alpha(M, M') e_{M'} \right) \otimes 1_K,$$

d.h. die Faktoren $T_\alpha(M, M')$ ändern sich bei Skalarerweiterung nicht, und somit bleiben auch die Polynome $B^\alpha_{M,N}(x)$ gleich. □

3.2 Beispiele

In diesem Abschnitt wird kurz gezeigt, wie aus dem Konzept der darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten bekannte Konzepte durch die Wahl einer speziellen Darstellung hervorgehen.

Beispiel (Grassmann-Varietät). Sei $\theta_0 : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k; a \longmapsto 0_{\mathrm{Mat}_n\, k}$ die triviale Darstellung. Dann ist die θ_0-invariante Grassmann-Varietät gleich der Grassmann-Varietät:

$$V_{\theta_0/k}(n, d) = V_k(n, d).$$

Beispiel (Brauer-Severi-Varietät). Sei $n := \dim_k A$ und

$$\theta_A : A \longrightarrow \mathrm{End}_k\, A \cong \mathrm{Mat}_n\, k; a \longmapsto (x \mapsto ax)$$

die durch die Linksmultiplikation induzierte reguläre Darstellung von A. Identifiziere dabei A mit k^n. Ein θ_A-invarianter k-Untervektorraum von A ist dann ein Linksideal von A. Ist A zentraleinfach, so ist $n = d^2$. Als Dimension eines nichttrivialen Linksideals von A kommen nur Werte μd für $1 \leq \mu \leq d$ in Frage.[41] Definiere in diesem Fall

$$\begin{aligned} BS_{A,\mu} :=& \operatorname{Grass}_{\theta_A/k}(n, \mu d) \\ =& \Big\{ U \leq k^n \ k\text{-UVR} \mid \dim_k U = \mu d \wedge A_{\theta_A} U \subset U \Big\} \\ =& \Big\{ U \leq A \text{ Linksideal der } k\text{-Dimension } \mu d \Big\} \\ V_{A,\mu} :=& V_{\theta_A/k}(n, \mu d), \\ L^T_{A,\mu} :=& \operatorname{Inv}^T_{\theta_A/k}(n, \mu d). \end{aligned}$$

Die Varietät $V_{A,\mu}$ heißt *Brauer-Severi-Varietät*, und $L^T_{A,\mu}$ heißt *Linksidealvarietät* bezüglich T.

Beispiel (Mehrfache reguläre Darstellung). Ist D eine k-Divisionsalgebra der Dimension n und $r, d \in \mathbb{N}$ mit $d \leq r$, so läßt sich mit Hilfe der hier eingeführten Notation die Formulierung[42] „Menge der d-dimensionalen D-Untervektorräume von D^r, aufgefaßt als k-Varietät" präzisieren: Ist

$$\theta_D : D \longrightarrow \operatorname{Mat}_n k$$

die reguläre Darstellung von D, so läßt sich durch

$$r\theta_D : D \longrightarrow \operatorname{Mat}_{rn} k; (a) \longmapsto \begin{pmatrix} \theta_D(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_D(a) \end{pmatrix}$$

eine r-fache reguläre Darstellung von D definieren. Ein $r\theta_D$-invarianter k-Untervektorraum von k^{rn} läßt sich dann bei geeigneter Identifizierung von k^{rn} und D^r als D-Untervektorraum von D^r betrachten. Die oben beschriebene Menge und ihr Bild unter der Plücker-Einbettung sind dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Grass}_D(r, d) :=& \operatorname{Grass}_{r\theta_D/k}(rn, dn) \quad \text{bzw.} \\ V_D(r, d) :=& V_{r\theta_D/k}(rn, dn). \end{aligned}$$

[41]Nach Proposition 4.6 iii) wird die Dimension eines Linksideals einer zentraleinfachen Algebra vom Grad der Algebra geteilt.

[42]Etwa bei Blanchet [5], p. 100, Remark 1.

3.3 Invarianzvarietäten und Eigenwerte

In dem Beweis von Satz 3.1 wird die Invarianzbedingung $AU \subseteq U$ in Verbindung mit der Nullstellenbedingung $B^{\alpha}_{M,N}(p) = 0$ gebracht. Anders formuliert ergibt sich

$$\begin{aligned}\overline{k}^{\,*}w \in \mathrm{Inv}^{T}_{\theta/k}(n,d) &\iff B^{\alpha}_{M,N}(\overline{k}^{\,*}w) = 0 \quad \forall\; M, N, \alpha \\ &\iff \alpha \cdot \overline{k}^{\,*}w = \overline{k}^{\,*}w \quad \forall\; \alpha \\ &\iff \tilde{\theta}(\alpha)w = \lambda_\alpha w \quad \forall\; \alpha \text{ für Werte } \lambda_\alpha \in k^*\end{aligned}$$

mit der in Bemerkung 2.5 definierten induzierten Operation durch Matrizen

$$\tilde{\theta}(\alpha) := \Big(\det\big(\theta(\alpha)^{M}_{M'}\big)\Big)_{M',M} \qquad \text{für } \alpha \in A.$$

Nach Korollar 2.9 liegen die Werte λ_α in k^*. Die letzte Zeile der Äquivalenz läßt sich auch als Eigenwertbedingung lesen: Zu jedem $\alpha \in T$ muß es einen Eigenwert λ_α von $\tilde{\theta}(\alpha)$ geben, zu dem w Eigenvektor ist,[43] also

$$\begin{aligned}\overline{k}^{\,*}w \in \mathrm{Inv}^{T}_{\theta/k}(n,d) &\iff \forall\; \alpha\; \exists\; \lambda_\alpha \text{ EW von } \tilde{\theta}(\alpha) : 0 \neq w \in \mathrm{Eig}_{\lambda_\alpha} \tilde{\theta}(\alpha) \\ &\iff 0 \neq w \in \mathrm{Eig}\, \tilde{\theta}(\alpha) \quad \forall\; \alpha,\end{aligned}$$

wobei für eine Matrix a

$$\mathrm{Eig}\, a := \bigcup_{\lambda} \mathrm{Eig}_\lambda\, a$$

sei. Eine Invarianzvarietät läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned}\mathrm{Inv}^{T}_{\theta/k}(n,d) &= \mathbf{P} \bigcap_{\alpha \in T} \mathrm{Eig}\, \tilde{\theta}(\alpha) \\ &= \mathbf{P} \bigcup_{\Lambda \in L} \bigcap_{\alpha \in T} \mathrm{Eig}_{\lambda_\alpha} \tilde{\theta}(\alpha),\end{aligned}$$

wobei L die Menge aller Tupel $\Lambda = (\,\lambda_\alpha \mid \alpha \in T)$ von Eigenwerten λ_α zu den Matrizen $\tilde{\theta}(\alpha)$ ist. Die Invarianzvarietät ist demnach die Projektivierung der Vereinigung von Untervektorräumen von $\bigwedge^d k^n$.

Bemerkung 3.3. $\mathrm{Inv}^{T}_{\theta/k}(n,d)$ ist Vereinigung linearer Varietäten[44].

---

[43] Bezeichne mit $\mathrm{Eig}_\lambda\, a$ den Eigenraum der Matrix a zum Eigenwert λ.

[44] Mit linearer Varietät ist die Projektivierung eines Untervektorraums gemeint.

Beispiel (Brauer-Severi-Varietät einer Quaternionenalgebra). Sei die Quaternionenalgebra $A := \left(\frac{a,b}{k}\right)$ mit Skalaren $a, b \in k$ gegeben in Form der Symbolalgebra

$$\left(\frac{a,b}{k,-1}\right) = \left\langle x, y \mid x^2 = a, y^2 = b, yx = -xy \right\rangle.$$

Mit der Identifizierung

$$1_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

induzieren die Zuordnungen

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } y \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine reguläre Darstellung $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_4 k$, d. h. es gilt

$$\alpha\beta = \theta(\alpha)\beta \quad \text{für } \alpha, \beta \in A.$$

Wegen $A = k[x, y]$ kann $T = \{x, y\}$ gewählt werden. Die induzierte Darstellung $\tilde{\theta}$ liefert Matrizen, die durch $M \in \mathcal{M}_{2,4}$ indiziert werden. Wähle als Anordnung $(12, 13, 14, 23, 24, 34)$. Dann sind die Bilder von x und y

$$\tilde{\theta}(x) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\tilde{\theta}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^2 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Polynome lassen sich durch Vertauschen der Spalten leicht berechnen:

$$\begin{aligned}&\mathrm{char}_{\tilde\theta(x)}(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda + a)^4 \text{ und}\\ &\mathrm{char}_{\tilde\theta(y)}(\lambda) = (\lambda - b)^2(\lambda + b)^4,\end{aligned}$$

d. h. $\pm a$ bzw. $\pm b$ sind die Eigenwerte. Für alle Kombinationen $(\pm a, \pm b)$ müssen nun die Durchschnitte der Eigenräume

$$E(\lambda_x, \lambda_y) := \mathrm{Eig}_{\lambda_x} \tilde\theta(x) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_y} \tilde\theta(y)$$

bestimmt werden. Man erhält[45]

$$\begin{aligned}E(a, b) &= \langle (0, 0, 1, 1, 0, 0)^t \rangle,\\ E(a, -b) &= \langle (0, a, 0, 0, 1, 0)^t \rangle,\\ E(-a, b) &= \langle (-b, 0, 0, 0, 0, 1)^t \rangle,\\ E(-a, -b) &= \langle (0, 0, -1, 1, 0, 0)^t, (0, -a, 0, 0, 1, 0)^t, (b, 0, 0, 0, 0, 1)^t \rangle.\end{aligned}$$

Die Invarianzvarietät $\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(4, 2)$ ist die Projektivierung der Vereinigung dieser Räume. Um nun die Brauer-Severi-Varietät von A zu berechnen, muß der Durchschnitt

$$V_{A,1} = V_{\theta_{A}/k}(4, 2) = V_k(4, 2) \cap \mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(4, 2)$$

bestimmt werden. Die Berechnung aus Abschnitt 2.3 ergab

$$V_k(4, 2) = \mathrm{Z}\left\{x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}\right\} \subseteq \mathbf{P}^5.$$

Setzt man die Koordinaten der Basisvektoren der Räume $E(a, b), E(a, -b)$ und $E(-a, b)$ in das definierende Polynom von $V_k(4, 2)$ ein, so sieht man, daß die Projektivierung dieser Räume nicht im Durchschnitt liegt, d.h.

$$V_{A,1} = V_k(4, 2) \cap \mathbf{P}E(-a, -b).$$

Ein Vektor aus $E(-a, -b)$ ist in $\bigwedge^2 k^4$ bestimmt durch die Gleichungen

$$\left\{x_{14} + x_{23}, x_{13} + ax_{24}, x_{12} - bx_{34}\right\},$$

also ist ein Punkt aus $\mathbf{P}E(-a, -b) \subseteq \mathbf{P} \bigwedge^2 k^4$ durch dieselben Gleichungen bestimmt, und deshalb ist die Brauer-Severi-Varietät von A

$$\begin{aligned}V_{A,1} &= \mathrm{Z}\left\{x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}, x_{14} + x_{23}, x_{13} + ax_{24}, x_{12} - bx_{34}\right\}\\ &\cong_k \mathrm{Z}\left\{by_0^2 + ay_1^2 - y_2^2\right\} \subseteq \mathbf{P}^3\end{aligned}$$

[45]Mit dem hochgestellten ^{t} ist das Transponieren gemeint.

mit der Einbettung

$$\mathbf{P}^3 \longrightarrow \mathbf{P} \bigwedge^2 k^4; (y_0 : y_1 : y_2) \longmapsto (by_0 : -ay_1 : -y_2 : y_2 : y_1 : y_0) .$$

Die Tatsache, daß hier nur ein $E(\pm a, \pm b)$ im Durchschnitt liegt, gilt viel allgemeiner: In Abschnitt 4.3 wird für zentraleinfache Algebren A gezeigt werden, daß für die Berechnung der θ-invarianten Grassmann-Varietät $V_{\theta/k}(n, d)$ einer Darstellung θ von A nur bestimmte Eigenwerte λ_α mit $\alpha \in T$ relevant sind:

$$V_{\theta/k}(n, d) = V_k(n, d) \cap \mathbf{P} \bigcap_{\alpha \in T} \mathrm{Eig}_{\lambda_\alpha} \tilde{\theta}(\alpha).$$

Überdies zeigt das Beispiel, daß die Deutung der Zugehörigkeit eines Punktes zu einer Invarianzvarietät als Eigenwertproblem ein praktisches Verfahren liefert, z. B. Brauer-Severi-Varietäten zu berechnen. Allerdings wächst auch hier die Komplexität schnell: Schon eine Symbolalgebra vom Grad 3 führt zur Berechnung der Eigenräume einer 84×84-Matrix. Das Verfahren wird im Kapitel 5 der Arbeit wieder aufgegriffen und verallgemeinert werden.

Im Abschnitt 3.1 wurde bei der Definition des Begriffs der Invarianzvarietät erwähnt, daß diese von der Wahl der Menge T abhängt. Dies kann am vorliegenden Beispiel gezeigt werden: Ist $T = \{x, y\}$, so ist

$$\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(4, 2) = \mathbf{P}\Big(E(a, b) \cup E(a, -b) \cup E(-a, b) \cup E(-a, -b)\Big) .$$

Wegen

$$(x+y)\frac{x+y}{a+b} = \frac{x^2 + xy + yx + y^2}{a+b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

ist $(x + y) \in A^*$, also invertierbar, wenn $a + b \neq 0$. Sei $a + b \neq 0$. Es ist

$$\theta(x+y) = \theta(x)+\theta(y) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{\theta}(x+y) = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 & 0 & -ab & -b^2 \\ -a & -b & 0 & 0 & a^2 & ab \\ 0 & 0 & 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -b & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & a & -a \end{pmatrix} .$$

Das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_{\tilde\theta(x+y)}(\lambda) = (\lambda-(a+b))^2(\lambda+(a+b))^4$$

liefert als Eigenwerte $\pm(a+b)$. Da $x, y \in k[x, x+y]$, ist $T' := \{x, x+y\} \subseteq A^*$ eine Menge mit $A = k[T']$. Mit

$$E'(\lambda_x, \lambda_{x+y}) := \mathrm{Eig}_{\lambda_x}\,\tilde\theta(x) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_{x+y}}\,\tilde\theta(x+y)$$

ist

$$\begin{aligned} E'(a, a+b) &= \langle (0,0,1,1,0,0)^t \rangle, \\ E'(a, -(a+b)) &= \emptyset, \\ E'(-a, a+b) &= \emptyset, \\ E'(-a, -(a+b)) &= E(-a, -b), \end{aligned}$$

d.h.

$$\mathrm{Inv}^{T}_{\theta/k}(4,2) \quad \neq \quad \mathrm{Inv}^{T'}_{\theta/k}(4,2)\ .$$

Die Mengen sind also verschieden, allerdings nur in den „irrelevanten“ Komponenten, denn für die Brauer-Severi-Varietät gilt weiterhin (wie ja auch zu erwarten war)

$$\begin{aligned} V_{A,1} &= V_k(4,2) \cap \mathbf{P}E(-a,-b) \\ &= V_k(4,2) \cap \mathbf{P}E'(-a,-(a+b))\ . \end{aligned}$$

3.4 Geometrische Eigenschaften

In diesem Abschnitt sind geometrische Eigenschaften von darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten zusammengestellt, die später benötigt werden. Da es im allgemeinen verschiedene geometrische Konzepte, etwa bei der Quotientenbildung, gibt, sind im Anhang A die wichtigsten Begriffe in der hier verwendeten Bedeutung aufgeführt. Ohne im einzelnen darauf hinzuweisen, werden sie benutzt.
Sei A eine k-Algebra, $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellung und $d \in \mathbb{N}$ mit $d < n$.

Definition. Fasse $\mathrm{Mat}_{n,d}\,\overline{k}$ als affinen Raum $\mathbf{A}^{nd}$ auf. Definiere

$$\begin{array}{rccc} \Psi := P \circ \pi : & \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k} & \longrightarrow & V_{\overline{k}}(n,d) \\ & a & \longmapsto & \overline{k}^{\,*} \wedge a \end{array}$$

und

$$\mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) := \Psi^{-1}\big(V_{\theta/k}(n,d)\big) \subseteq \mathbf{A}^{nd}\ .$$

Sei $M \in \mathcal{M}_{d,n}$ und $U_M := \mathbf{P}\bigwedge^d k^n - \mathrm{Z}(x_M)$. Definiere

$$V^M_{\theta/k}(n,d) := V_{\theta/k}(n,d) \cap U_M\ ,$$

$$\mathrm{St}^M_{\theta/k}(n,d) := \Psi^{-1}\big(V^M_{\theta/k}(n,d)\big)\ .$$

Bemerkung 3.4.

i) Die Abbildung

$$\Psi := P \circ \pi : \begin{array}{ccc} \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k} & \longrightarrow & V_k(n,d) \\ a & \longmapsto & \overline{k}^{\,*}\wedge a \end{array}$$

ist ein surjektiver Morphismus von Varietäten.

ii) $\mathrm{St}_{\theta/k}(n,d)$ ist eine affine Varietät, da

$$\mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) = \Psi^{-1}(V_{\theta/k}(n,d)).$$

iii) Die Operation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) \times \mathrm{GL}_d\,\overline{k} & \longrightarrow & \mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) \\ (b,a) & \longmapsto & ba \end{array}$$

ist geometrisch.

iv) Sei $M \in \mathcal{M}_{d,n}$. Betrachte die Abbildung

$$P^*_M : V_k(n,d) \cap U_M \longrightarrow \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k}\,;\ p \mapsto a := (a_{ij})_{ij}$$

mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = i_j \\ 0 & \text{falls } i \in M \text{ und } i \neq i_j \\ \frac{p_{M_{i,j}}}{p_M}(-1)^{j+\mathrm{pos}(i,M_{ij})} & \text{falls } i \notin M \end{cases}$$

und

$$M = (i_1, \ldots, i_d),$$
$$M_{i,j} := (i) \cup M - (i_j),$$
$$p = \sum_M p_M e_M \in \overline{k}$$

aus Abschnitt 2.4. Die Einschränkung

$$P_M^* : V_{\theta/k}^M(n,d) \longrightarrow \mathrm{St}_{\theta/k}^M(n,d)$$

ist ein injektiver Morphismus. Außerdem ist sie ein lokaler Schnitt von Ψ auf dem Bahnenraum[46] $\mathrm{St}_{\theta/k}^M(n,d)/\operatorname{GL}_d \overline{k}$, d. h. mit $G := \operatorname{GL}_d \overline{k}$ gilt

$$P_M^* \circ \Psi(bG) \subseteq bG \quad \text{für alle } b \in \mathrm{St}_{\theta/k}^M(n,d).$$

v) Die induzierte Operation

$$\begin{array}{ccc} V_{\theta/k}(n,d) \times \operatorname{GL}_d \overline{k} & \longrightarrow & V_{\theta/k}(n,d) \\ (\Psi(b),a) & \longmapsto & \Psi(ba) \end{array}$$

ist geometrisch, denn mit $p = P(b) \in V_{\theta/k}^M(n,d)$ ist $P(ba) = P(P_M^*(p)a)$, und dies ist wegen iii) und iv) ein Morphismus.

Satz 3.5. $\mathrm{St}_{\theta/k}(n,d)$ *und* $V_{\theta/k}(n,d)$ *sind glatt.*

Beweis. Folgt mit Satz A.5 i) aus Bemerkung 3.4 iii) und v). □

Satz 3.6. *Der geometrische Quotient* $\mathrm{St}_{\theta/k}(n,d)/\operatorname{GL}_d \overline{k}$ *existiert, und es gilt*

$$V_{\theta/k}(n,d) \cong \mathrm{St}_{\theta/k}(n,d)/\operatorname{GL}_d \overline{k}\,.$$

Beweis. Die Abbildung

$$\mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) \longrightarrow V_{\theta/k}(n,d); a \longmapsto \Psi(a) = P \circ \pi(a)$$

ist nach Bemerkung 3.4 i) ein surjektiver Morphismus. Da π invariant bezüglich der Operation von $\operatorname{GL}_d \overline{k}$ ist, ist es auch Ψ. Wegen Bemerkung 3.4 iv) gibt es für jede reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(U_M)^G$ eine reguläre Funktion $g \in \mathcal{O}(\Psi^{-1}(U_M))$ mit

$$f = \Psi^*(g)\ ,$$

nämlich $g = f \circ P_M^*$. Wegen Bemerkung A.7 folgt damit die Behauptung. □

[46] Zur verwendeten Terminologie siehe Abschnitt A.3.

Geometrische Eigenschaften von Grassmann-Varietäten

Satz 3.7. *$St_{n,d}\overline{k}$ und $V_k(n,d)$ sind irreduzibel.*

Beweis. Die Operation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n\,\overline{k}\,\times \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k} & \longrightarrow & \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k} \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

ist geometrisch und transitiv: Ergänze $b, b' \in \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k}$ zu regulären $n \times n$-Matrizen $\tilde{b}, \tilde{b}'$. Mit $a := \tilde{b}'\tilde{b}^{-1}$ gilt dann $ab = b'$. Da $\mathrm{GL}_n\,\overline{k}$ zusammenhängend ist, folgt mit Satz A.5, daß $\mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k}$ irreduzibel ist.
Die Abbildung $\pi : \mathrm{St}_{n,d}\,\overline{k} \longrightarrow V_k(n,d)$ ist ein surjektiver Morphismus, deshalb ist $V_k(n,d)$ auch irreduzibel: Wäre $V_k(n,d) = V_1 \cup V_2$ eine Vereinigung abgeschlossener Mengen, die ungleich $V_k(n,d)$ sind, so wäre $\pi^{-1}V_1 \cup \pi^{-1}V_2$ ebenfalls eine Vereinigung abgeschlossener Mengen. □

Betrachte den Morphismus

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n-d,d}\,\overline{k} \\ & a & \longmapsto & (aa^{-1})_{-M}\ . \end{array}$$

Mit dem Symbol $-M$ ist der Index $(1,\ldots,n) - M$ gemeint, d. h. aus der davorstehenden Matrix werden alle Zeilen genommen, deren Nummern nicht in M stehen. Der Morphismus $\hat{P}^*_M := r \circ P^*_M$ läßt sich wegen[47] $(P^*_M(p))_M = E_d$ für $p \in V^M_{\theta/k}(n,d)$ schreiben als

$$\begin{array}{rccccc} \hat{P}^*_M: & V^M_{\theta/k}(n,d) & \xrightarrow{P^*_M} & \mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n-d,d}\,\overline{k}\ . \\ & p & \longmapsto & a & \longmapsto & a_{-M} \end{array}$$

$\hat{P}^*_M$ ist ein Isomorphismus auf sein Bild, denn der Morphismus

$$\begin{array}{ccccc} \hat{P}^*_M\big(V^M_{\theta/k}(n,d)\big) & \xrightarrow{r^*} & \mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) & \longrightarrow & V^M_{\theta/k}(n,d) \\ a & \longmapsto & r^*(a) & \longmapsto & P(\langle r^*(a)\rangle) \end{array}$$

ist invers zu $\hat{P}^*_M$, wobei r^* definiert ist durch $r^*(a)_M := E_d$ und $r^*(a)_{-M} := a$. Wegen $\hat{P}^*_M\big(V_k(n,d) \cap U_M\big) = \mathrm{Mat}_{n-d,d}\,\overline{k}$ gilt

Proposition 3.8. $V_k(n,d) \cap U_M \ \cong_k\ \mathrm{Mat}_{n-d,d}\,\overline{k}$.

Korollar 3.9. *$V_k(n,d)$ ist rational und hat die Dimension $d(n-d)$.*

[47] Mit E_d ist die $d \times d$-Einheitsmatrix gemeint.

Beweis. Daß $V_k(n,d)$ rational, d.h. birational äquivalent zu einem affinen Raum ist, folgt aus Proposition 3.8:

$$V_k(n,d) \cap U_M \;\cong_k\; \mathrm{Mat}_{n-d,d}\,\overline{k} \;\cong_k\; \mathbf{A}^{d(n-d)}.$$

Hier läßt sich auch die Dimension ablesen. □

Verträgliche Morphismen

Seien $V_{\theta_1/k}(n_1,d_1)$ und $V_{\theta_2/k}(n_2,d_2)$ darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten. Schreibe abkürzend $V_1, V_2, \mathrm{St}_1, \mathrm{St}_2$ usw. Häufig werden Morphismen $V_1 \longrightarrow V_2$ über eine Abbildung $\mathrm{St}_1 \longrightarrow \mathrm{St}_2$ definiert. Allerdings führen nicht alle Morphismen $\mathrm{St}_1 \longrightarrow \mathrm{St}_2$ zu Morphismen $V_1 \longrightarrow V_2$, sondern nur die, welche eine Verträglichkeitsbedingung erfüllen. Verträgliche Isomorphismen $\mathrm{St}_1 \longrightarrow \mathrm{St}_2$ führen zu Isomorphismen $V_1 \longrightarrow V_2$. In dieser Arbeit tritt auch folgender Fall auf:[48] Ein verträglicher Morphismus $\mathrm{St}_1 \longrightarrow \mathrm{St}_2$ induziert einen bijektiven Morphismus $V_1 \longrightarrow V_2$. In welchen Fällen dieser dann ein Isomorphismus ist, gibt Satz 3.11 an. Die Argumentation dieses Beweises folgt der von Blanchet [5] (p. 102, Beweis zu Proposition 2). Die dort bewiesene Aussage ist allerdings spezieller.

Definition. Ein Morphismus

$$f : \mathrm{St}_1 \longrightarrow \mathrm{St}_2$$

heißt *verträglich* , falls

$$f(p\,\mathrm{GL}_{d_1}\overline{k}\,) \subseteq f(p)\,\mathrm{GL}_{d_2}\overline{k} \quad \forall\, p \in \mathrm{St}_1\,.$$

f heißt *verträglicher Isomorphismus*, wenn es einen verträglichen Morphismus f^* gibt mit

$$f^* \circ f(p\,\mathrm{GL}_{d_1}\overline{k}\,) \subseteq \mathrm{GL}_{d_1}\overline{k} \;\text{ und }\; f \circ f^*(q\,\mathrm{GL}_{d_2}\overline{k}\,) \subseteq \mathrm{GL}_{d_2}\overline{k}$$

für alle $p \in \mathrm{St}_1$ und $q \in \mathrm{St}_2$.

Proposition 3.10. *Ein verträglicher Morphismus*

$$f : \mathrm{St}_1 \longrightarrow \mathrm{St}_2$$

induziert eine Abbildung

$$f^\circ : \mathrm{Grass}_1 \longrightarrow \mathrm{Grass}_2$$

und einen Morphismus von projektiven Varietäten

$$\tilde{f} : V_1 \longrightarrow V_2,$$

so daß folgendes Diagramm kommutiert:

[48] Siehe Beweis von Satz 4.11.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathrm{St}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
\mathrm{Grass}_1 \arrow[r, "f^\circ"'] \arrow[d, "P_1"'] & \mathrm{Grass}_2 \arrow[d, "P_2"] \\
V_1 \arrow[r, "\tilde{f}"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

Ist f ein verträglicher Isomorphismus, so ist $\tilde{f}$ ein Isomorphismus, und f° ist bijektiv.

Beweis. Definiere

$$f^\circ := \pi_2 \circ f \circ \pi_1^* \quad , \text{ wobei } \pi_1^*(U) \in \pi_1^{-1}(U)\ \forall\, U \in \mathrm{Grass}_1 .$$

Diese Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl der Urbilder, denn sind $a_1, a_2 \in \mathrm{St}_1$ Urbilder von U, so ist $a_1 = a_2 b$ mit $b \in \mathrm{GL}_{d_1}\overline{k}$, und wegen der Verträglichkeit von f gilt $f(a_1) = f(a_2 b)c$ mit $c \in \mathrm{GL}_{d_2}\overline{k}$, und es folgt $\pi_2(f(a_1)) = \pi_2(f(a_2 b)c)$. Ist f ein verträglicher Isomorphismus, so ist $f^{\circ -1} := \pi_1 \circ f^* \circ \pi_2^*$ die Umkehrabbildung zu f°.
Die in Abschnitt 2.4 definierte Umkehrung der Plücker-Einbettung P_M^* ist für jedes M ein Morphismus. Definiere nun für einen Punkt $p \in V_1 \cap U_M$

$$\tilde{f}(p) := P_2 \circ \pi_2 \circ f \circ P_{1M}^*(p).$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl eines M: Ist $p \in V_1 \cap U_M \cap U_N$, so ist $\pi_1(P_{1M}^*(p)) = \pi_1(P_{1N}^*(p))$, also $P_{1M}^*(p) = P_{1N}^*(p)b$ mit $b \in \mathrm{GL}_{d_1}\overline{k}$, und die Unabhängigkeit folgt entsprechend.
Sei $p \in V_1 \cap U_M$ und $\tilde{f}(p) \in U_N$. Für $U_2 := \tilde{f}(V_1 \cap U_M) \cap U_N$ sei $U_1 := f^{-1}(U_2)$ die Urbildmenge. Ist f ein verträglicher Isomorphismus, so läßt sich durch $\tilde{f}^* : U_2 \longrightarrow U_1; p \longmapsto P_1 \circ \pi_1 \circ f^* \circ P_{2N}^*(p)$ eine lokale Umkehrung von $\tilde{f}$ definieren.
Per Definition sind alle Abbildungen verträglich. □

Satz 3.11. *Seien St_1 und St_2 irreduzible Varietäten und $f : \mathrm{St}_1 \longrightarrow \mathrm{St}_2$ ein verträglicher Morphismus. Ist die induzierte Abbildung $\tilde{f} : V_1 \longrightarrow V_2$ bijektiv, so ist $\tilde{f}$ ein Isomorphismus.*

Beweis.[49] Zeige, daß $\overline{k}\,(V_1) \cong \overline{k}\,(V_2)$. Dann ist $\tilde{f}$ birational und bijektiv. Da V_2 nach Korollar 3.5 glatt und insbesondere normal ist, ist $\tilde{f}$ nach Korollar A.3 ein Isomorphismus.
Da $\tilde{f}$ surjektiv ist, ist $\tilde{f}$ dominant. Da $\tilde{f}$ auch injektiv ist und die Varietäten V_1 und V_2 als Bilder der irreduziblen Varietäten St_1 bzw. St_2 irreduzibel sind, ist die Körpererweiterung $\overline{k}\,(V_1)/\tilde{f}^*\overline{k}\,(V_2)$ nach Satz A.6 rein inseparabel.
Andererseits ist die Erweiterung separabel: Jede Faser von $\psi := \tilde{f} \circ \pi : \mathrm{St}_1 \longrightarrow V_2$ ist rational, insbesondere die eines generischen Punktes von V_2. Deshalb ist die Körpererweiterung

$$\overline{k}\,(\mathrm{St}_1)/\psi^*\overline{k}\,(V_2)$$

rational und daher auch separabel. Dann ist aber auch die durch $\pi^* : \overline{k}\,(V_1) \longrightarrow \overline{k}\,(\mathrm{St}_1)$ in $\overline{k}\,(\mathrm{St}_1)$ eingebettete Körpererweiterung $\overline{k}\,(V_1)/\tilde{f}^*\overline{k}\,(V_2)$ separabel. □

3.5 Spezielle Darstellungen

In diesem Abschnitt werden Darstellungen spezieller Form und die aus dieser Form resultierenden Eigenschaften untersucht. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten isomorph sind oder unter denen Morphismen zwischen darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten bestehen.
Seien A und B k-Algebren, $f : A \longrightarrow B$ ein k-Algebra-Homomorphismus und $\theta : B \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellung. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \leq n$. Dann induziert θ eine Darstellung

$$\theta^* : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k; a \longmapsto \theta(f(a)).$$

Mit dieser induzierten Darstellung hat man die Inklusion

$$\mathrm{St}_{\theta/k}(n,d) \subseteq \mathrm{St}_{\theta^*/k}(n,d).$$

Da die Inklusionsabbildung trivialerweise verträglich ist, erhält man nach Proposition 3.10 einen Morphismus

$$\tilde{f} : V_{\theta/k}(n,d) \longrightarrow V_{\theta^*/k}(n,d).$$

Ist f ein Isomorphismus, so ist $\tilde{f}$ auch ein Isomorphismus.

[49]Der Beweis folgt Blanchet [5] (p. 102, Beweis zu Proposition 2). Die dort bewiesene Aussage ist aber wesentlich spezieller als dieser Satz.

Proposition 3.12. *Sind A und B k-Algebren und $\theta : B \longrightarrow \operatorname{Mat}_n k$ eine Darstellung von B, so gilt*

$$A \cong B \implies V_{\theta/k}(n,d) \cong_k V_{\theta^*/k}(n,d).$$

Definition. Zwei Darstellungen $\theta_1, \theta_2 : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_n k$ heißen *äquivalent* (in Zeichen $\theta_1 \cong \theta_2$), falls es eine Matrix $c \in \operatorname{GL}_n k$ gibt mit

$$\theta_2(\alpha) = c^{-1}\theta_1(\alpha)c$$

für alle $\alpha \in A$.

Proposition 3.13. *Für Darstellungen $\theta_1, \theta_2 : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_n k$ gilt*

$$\theta_1 \cong \theta_2 \implies V_{\theta_1/k}(n,d) \cong_k V_{\theta_2/k}(n,d).$$

Beweis. Sei $\theta_2(\alpha) = c^{-1}\theta_1(\alpha)c$ für ein $c \in \operatorname{GL}_n k$ und für alle $\alpha \in A$ erfüllt. Für ein $b \in \operatorname{St}_{\theta_1/k}(n,d)$ liegt $c^{-1}b$ in $\operatorname{St}_{\theta_2/k}(n,d)$, denn für alle $\alpha \in A$ gilt $\langle \theta_2(\alpha)c^{-1}b\rangle = \langle c^{-1}\theta_1(\alpha)cc^{-1}b\rangle \subseteq \langle c^{-1}b\rangle$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \operatorname{St}_{\theta_1/k}(n,d) & \longrightarrow & \operatorname{St}_{\theta_2/k}(n,d) \\ & b & \longmapsto & c^{-1}b \end{array}$$

ist ein verträglicher Isomorphismus, und die Behauptung folgt mit Proposition 3.10. □

Schreibweise. Sei A eine k-Algebra und V ein k-Vektorraum. Betrachte die Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Mat}_r k \otimes_k A & \longrightarrow & \operatorname{Mat}_r A \\ a \otimes \alpha & \longmapsto & \big(a_{ij}\alpha\big)_{ij} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} k^r \otimes_k A & \longrightarrow & V^r \\ v \otimes u & \longmapsto & \begin{pmatrix} v_1 u \\ \vdots \\ v_r u \end{pmatrix} \end{array}$$

als Identifizierungen. Ist z.B. $a \in \operatorname{Mat}_r k$ und $b \in \operatorname{Mat}_s k$, so ist $a \otimes b$ eine Matrix aus $\operatorname{Mat}_r k \otimes_k \operatorname{Mat}_s k = \operatorname{Mat}_{rs} k$. Die im allgemeinen von $a \otimes b$ verschiedene Matrix $b \otimes a$ ist auch aus $\operatorname{Mat}_{rs} k$.

Bemerkung 3.14. Seien A, B, V, W k-Vektorräume. Operiert A auf V und B auf W von links oder von rechts, so operiert $A \otimes_k B$ auf $V \otimes_k W$ von links bzw. rechts durch

$$(a \otimes b)(v \otimes w) := (av \otimes bw) \quad \text{bzw.}$$

$$(v \otimes w)(a \otimes b) := (va \otimes wb).$$

Definition. Seien

$$\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_r k \quad \text{und}$$

$$\theta' : B \longrightarrow \operatorname{Mat}_s k$$

Darstellungen von k-Algebren A und B. Definiere das Tensorprodukt dieser Darstellungen:

$$\begin{array}{rccc} \theta \otimes \theta' : & A \otimes_k B & \longrightarrow & \operatorname{Mat}_{rs} k \; . \\ & \alpha \otimes \beta & \longmapsto & \theta(\alpha) \otimes \theta'(\beta) \end{array}$$

$\theta \otimes \theta'$ ist eine Darstellung von $A \otimes B$. Später werden insbesondere folgende Spezialfälle wichtig:

i) Sei $A := \{0\}$ und $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_r k; 0 \longmapsto E_r$, wobei E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix ist. Definiere

$$\begin{array}{rccc} r\theta' := \theta \otimes \theta' : & B & \longrightarrow & \operatorname{Mat}_{rs} k \\ & \beta & \longmapsto & E_r \otimes \theta'(\beta) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \theta' r := \theta' \otimes \theta : & B & \longrightarrow & \operatorname{Mat}_{rs} k \; . \\ & \beta & \longmapsto & \theta'(\beta) \otimes E_r \end{array}$$

ii) Sei $A := \operatorname{Mat}_r k$ und $\theta = \operatorname{id}$. Definiere

$$\begin{array}{rccc} \theta'^r := \theta \otimes \theta' : & \operatorname{Mat}_r B & \longrightarrow & \operatorname{Mat}_{rs} k \; . \\ & a \otimes \beta & \longmapsto & a \otimes \theta'(\beta) \end{array}$$

Bemerkung 3.15. Wegen $r\theta' \cong \theta' r$ gilt

$$V_{r\theta'/k}(n, d) \cong_k V_{\theta' r/k}(n, d) \; .$$

Die Abbildung γ

Seien $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_s k$ und $\theta' : B \longrightarrow \operatorname{Mat}_r k$ Darstellungen von k-Algebren A und B und $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq r$.

Proposition 3.16. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \operatorname{St}_{\theta'/k}(r,\nu) & \longrightarrow & \operatorname{St}_{\theta\otimes\theta'/k}(rs,\nu s) \\ & b & \longmapsto & E_s \otimes b \end{array}$$

ist ein verträglicher, injektiver Morphismus und induziert einen injektiven Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\gamma} : & V_{\theta'/k}(r,\nu) & \longrightarrow & V_{\theta\otimes\theta'/k}(rs,\nu s) \\ & \Psi(b) & \longmapsto & \Psi\circ\gamma(b) \end{array} .$$

Beweis. Sei $b \in \operatorname{St}_{\theta'/k}(r,\nu)$.

i) $\gamma(b) \in \operatorname{St}_{rs,\nu s} k$: Sei $\det b_M \neq 0$. Dann ist $\det(E_s \otimes b_M) \neq 0$.

ii) $\gamma(b) \in \operatorname{St}_{\theta\otimes\theta'/k}(rs,\nu s)$: Sei $\delta := \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \in A \otimes_k B$. Dann gibt es $c_i \in \operatorname{GL}_\nu k$ für alle i, so daß $\theta'(\beta_i)b = bc_i$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \theta(\alpha_i)\otimes\theta'(\beta_i)\right)(E_s\otimes b) &= \sum_i \theta(\alpha_i)\otimes\theta'(\beta_i)b \\ &= \sum_i \theta(\alpha_i)\otimes bc_i \\ &= (E_s\otimes b)\underbrace{\sum_i \theta(\alpha_i)\otimes c_i}_{=:\, c\,\in\,\operatorname{Mat}_{\nu s} k} . \end{aligned}$$

Für alle $\delta \in A\otimes_k B$ gilt also $(\theta\otimes\theta')(\delta)\gamma(b) = \gamma(b)c$, d.h. $(\theta\otimes\theta')(\delta)\langle\gamma(b)\rangle \subseteq \langle\gamma(b)\rangle$.

iii) Verträglichkeit: Ist $c \in \operatorname{GL}_\nu k$, so gilt

$$E_s\otimes bc = (E_s\otimes b)\underbrace{(E_s\otimes c)}_{\in\operatorname{GL}_{\nu s} k} .$$

iv) Injektivität von γ: Gilt $E_s\otimes b = E_s\otimes b'$, so folgt $b = b'$.

v) Aus Proposition 3.10 folgt, daß $\tilde{\gamma}$ ein Morphismus ist.

vi) Injektivität von $\tilde{\gamma}$: Sei $(E_s\otimes b)\hat{c} = E_s\otimes b'$ mit $\hat{c} \in \operatorname{GL}_{\nu s} k$. Dann ist $\hat{c}$ von der Form $\hat{c} = E_s\otimes c$ mit $c \in \operatorname{GL}_\nu k$ und es ist $bc = b'$. $\square$

Die Abbildung η

Sei A eine k-Divisionsalgebra der Dimension n und $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_m\, k$ eine Darstellung von A. Sei $d_1, \dots, d_n$ eine Basis des k-Untervektorraums $\theta(A)$ von $\mathrm{Mat}_m\, k$. Definiere für $b \in k^m$

$$\hat{b} := \big(d_1 b | \dots | d_n b\big) \in \mathrm{Mat}_{m,n}\, k.$$

Ist $b \neq 0$, so ist $\hat{b} \in \mathrm{St}_{m,n}\, k$, denn: Sei $\sum_i \alpha_i d_i b = 0$ mit $\alpha_i \in k$ und $\alpha_j \neq 0$ für ein j. Dann ist

$$\sum_i \alpha_i d_i b = \Big(\underbrace{\sum_i \alpha_i d_i}_{=:c}\Big) b = 0 \ ,$$

und da $c \neq 0$ und damit invertierbar ist, muß $b = 0$ sein, ein Widerspruch. Insbesondere ist $n \leq m$. Seien $r, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq r$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \hat{\eta}: & \mathrm{Mat}_{rm,\nu}\, k & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{rm,\nu n}\, k \ , \\ & a \otimes b & \longmapsto & a \otimes \hat{b} \end{array}$$

wobei $a \in \mathrm{Mat}_{r,\nu}\, k$ und $b \in k^m$ ist. Sei

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{St}}_{rm,\nu} k &:= \hat{\eta}^{-1}\big(\mathrm{St}_{rm,\nu n}\, k\big) \\ &= \Big\{ a \in \mathrm{St}_{rm,\nu}\, k \ \Big| \ \dim\langle r\theta(A)a\rangle = \nu n \Big\} \\ &= \Big\{ \textstyle\sum_i a_i \otimes b_i \in \mathrm{St}_{rm,\nu}\, k \ \Big| \ \det\big(\sum_i a_i \otimes \hat{b}_i\big)_M \neq 0 \text{ für ein } M \in \mathcal{M}_{\nu n, rm} \Big\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.17. Die Abbildung $\hat{\eta}$ ist ein Morphismus affiner Varietäten. Deshalb ist $\hat{\mathrm{St}}_{rm,\nu}\overline{k}$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen in $\mathrm{Mat}_{rm,\nu}\, \overline{k}$. Die untere Beschreibung zeigt, daß $\hat{\mathrm{St}}_{rm,\nu}\overline{k}$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{St}_{rm,\nu}\, \overline{k}$ ist.

Proposition 3.18. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \hat{\mathrm{St}}_{rm,\nu}\overline{k} & \longrightarrow & \mathrm{St}_{r\theta/k}(rm, \nu n) \\ & a \otimes b & \longmapsto & a \otimes \hat{b} \end{array}$$

ist ein verträglicher, injektiver Morphismus.

Beweis. Sei $\alpha \in A$ und $\theta(\alpha) d_j = \sum_i \delta_i^j d_i$ mit $\delta_i^j \in k$. Dann ist

$$\begin{aligned} r\theta(\alpha)(a \otimes d_j b) &= a \otimes \theta(\alpha) d_j b = a \otimes \sum_i \delta_i^j d_i b \\ &= \sum_i \delta_i^j (a \otimes d_i b), \end{aligned}$$

d.h. alle Spalten von $r\theta(\alpha)(a \otimes \hat{b})$ sind in $\langle a \otimes \hat{b} \rangle$ enthalten.
Verträglichkeit: Sei $c \in \mathrm{GL}_\nu \overline{k}$. Damit ist

$$\eta\big((a \otimes b)c\big) = \eta(ac \otimes b) = ac \otimes \hat{b} = (a \otimes \hat{b})(c \otimes E_n) .$$

Injektivität: klar.

$\square$

Sei ab hier $m = n$, d.h. sei A eine k-Divisionsalgebra der Dimension n und $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellung von A. Sei $e_i \in k^n$ der Vektor, der an der i-ten Stelle eine Eins und sonst Null als Einträge hat, und E_ν die $\nu \times \nu$-Einheitsmatrix. Definiere

$$E^\circ := E_\nu \otimes e_1 \in \mathrm{St}_{\nu n,\nu}\, k.$$

Schreibe für $c := a \otimes b$ mit $b \in k^n$

$$\hat{c} := a \otimes \hat{b} .$$

Ist $a \in \mathrm{Mat}_{p,q}\, k$, $b \in \mathrm{Mat}_{o-p,q}\, k$ für $o, p, q \in \mathbb{N}$ mit $p \leq o$ und $M \in \mathcal{M}_{p,o}$, so bezeichne $c := \binom{a}{b}^M \in \mathrm{Mat}_{o,q}\, k$ die durch $c_M := a$ und $c_{-M} := b$ eindeutig bestimmte Matrix.
Sei $M := (1, \ldots, \nu n) \in \mathcal{M}_{\nu n, rn}$. Betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{array}{cccccccc} \varphi : \mathrm{Mat}_{(r-\nu)n,\nu}\, \overline{k} & \longrightarrow & \mathrm{St}_{rn,\nu}\, \overline{k} & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{St}^M_{r\theta/k}(rn, \nu n) & \xrightarrow{\Psi} & V^M_{r\theta/k}(rn, \nu n). \\ b & \longmapsto & \binom{E^\circ}{b}^M & \longmapsto & \binom{\hat{E}^\circ}{\hat{b}}^M & \longmapsto & \Psi\Big(\binom{\hat{E}^\circ}{\hat{b}}^M\Big) \end{array}$$

Diese Abbildung ist ein Isomorphismus:

Satz 3.19.

$$\mathrm{Mat}_{(r-\nu)n,\nu}\, \overline{k} \cong_k V^M_{r\theta/k}(rn, \nu n).$$

Beweis. Folgender Morphismus ist eine Umkehrabbildung zu φ:

$$\begin{array}{cccccccc} \varphi^* : V^M_{r\theta/k}(rn, \nu n) & \xrightarrow{P^*_M} & \mathrm{St}^M_{r\theta/k}(rn, \nu n) & \xrightarrow{g} & \mathrm{St}_{rn,\nu}\, \overline{k} & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{(r-\nu)n,\nu}\, \overline{k} . \\ p & \longmapsto & P^*_M(p)\hat{E}^\circ & \longmapsto & \binom{E^\circ}{b}^M & \longmapsto & b \\ & & = \binom{\hat{E}^\circ}{\hat{b}}^M & & & & \end{array}$$

Dabei ist g der Morphismus, der eine Matrix $a \otimes \hat{c}$ mit $a \in \mathrm{Mat}_{r,\nu}\, \overline{k}$ und $c \in \overline{k}^{\,n}$ auf $a \otimes c$ abbildet, indem z. B. der erste Spaltenvektor $d_1 c$ von $\hat{c}$ auf $d_1^{-1} d_1 c = c$ abgebildet wird. Zu zeigen ist noch, daß tatsächlich $P^*_M(p)\hat{E}^\circ$ von der Form $\binom{\hat{E}^\circ}{\hat{b}}^M$ mit $b \in \mathrm{Mat}_{(r-\nu)n,\nu}\, \overline{k}$ ist.

Sei $a := P_M^*(p)\hat{E}^\circ$. Dann ist $a_M = \hat{E}^\circ$, da $P_M^*(p)_M = E_{\nu n}$. Sei $u \in \overline{k}^{\,rn}$ ein Spaltenvektor aus a. Dann ist u_M ein Spaltenvektor von $\hat{E}^\circ$, also von der Form $e_i \otimes d_j e_1$ mit $e_i \in \overline{k}^{\,r}$ und $e_1 \in \overline{k}^{\,n}$. Sei $\theta(\alpha_j) = d_j$. Dann ist $u' := r\theta(\alpha_j^{-1})u$ in $\langle a \rangle$ enthalten und $u'_M = e_i \otimes e_1$. Also ist $r\theta(\alpha_j)u' = u$, d. h. a ist von der angegebenen Form. $\square$

Kapitel 4

Anwendung auf zentraleinfache Algebren

In diesem Kapitel werden Eigenschaften von Brauer-Severi-Varietäten auf den Fall darstellungsinvarianter Grassmann-Varietäten von zentraleinfachen Algebren verallgemeinert (Abschnitt 4.4). Allerdings sind hier aus Gründen des Umfangs nur die Ergebnisse verallgemeinert worden, die im weiteren Verlauf der Arbeit gebraucht werden. Damit sind vor allem Satz 4.21 (ein Zerfallskriterium für zentraleinfache Algebren) und die folgenden Korollare gemeint.
Die allgemeine Situation des vorherigen Kapitels wird nun eingeschränkt. Im ersten Abschnitt sind wichtige Sätze über einfache Algebren zusammengestellt, die dann im zweiten auf die Untersuchung von darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten angewendet werden. Die Hauptergebnisse für zentraleinfache Algebren finden sich in Abschnitt 4.4.
In Abschnitt 4.3 werden Invarianzvarietäten von einfachen Algebren untersucht. Dabei stellt sich heraus, daß von den Komponenten[50] einer Invarianzvarietät für die Beschreibung einer darstellunginvarianten Grassmann-Varietät

$$V_{\theta/k}(n,d) := V_k(n,d) \cap \mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d)$$

im Fall einer einfachen Algebra A nur eine einzige benötigt wird — alle anderen liegen außerhalb des Durchschnitts. Ist A zentraleinfach, so tritt hier die reduzierte Norm von A auf. Sie bildet ein Element $\alpha \in T$ auf einen Eigenwert λ_α der Matrix $\tilde{\theta}(\alpha)$ ab, der diesen relevanten Bestandteil definiert.

[50] Vgl. die Darstellung einer Invarianzvarietät als Vereinigung linearer Räume in Abschnitt 3.3.

4.1 Einfache Algebren

In diesem Abschnitt sind einige Aussagen über einfache Algebren zusammengestellt. Die Relevanz dieses Falls für zentraleinfache Algebren ergibt sich aus folgendem Satz:

Satz 4.1. *Ist A einfach, so ist das Zentrum $Z(A)$ ein Körper.*

Beweis. Siehe Pierce [33], chap. 12.1, Proposition. □

Eine einfache k-Algebra ist also eine zentraleinfache $Z(A)$-Algebra. Untersuchungen, die mit einfachen Algebren zusammenhängen, können demnach häufig aufgeteilt werden in eine Untersuchung des Falls einer zentraleinfachen Algebra und die Untersuchung des Verhaltens bei Skalarerweiterung. Wie in den ersten Kapiteln gezeigt wurde, ändern sich die hier betrachteten Varietäten bei Änderung des Skalarbereichs nicht[51] (siehe Propositionen 2.10 und 3.2).
Für zentraleinfache Algebren sind die folgenden Eigenschaften wichtig :

Satz 4.2. *Sei A eine zentraleinfache k-Algebra.*

i) Es gibt eine Divisionsalgebra über k und eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, so daß

$$A \cong \mathrm{Mat}_r\, D$$

gilt. Die Zahl r ist eindeutig, D ist bis auf Isomorphie eindeutig.

ii) Es gibt eine Körpererweiterung K/k, so daß K ein Zerfällungskörper von A ist, d. h.

$$A \otimes_k K \cong \mathrm{Mat}_d\, K\ .$$

K kann sogar endlich und galoissch gewählt werden.

Beweis. i) Draxl [13], par. 9, Theorem 1.
ii) Draxl [13], par. 9, Theorem 8.

□

Definition. Sei A eine zentraleinfache k-Algebra. Wie aus obigem Satz hervorgeht, ist die k-Dimension von A eine Quadratzahl. Ist $\dim A = d^2$, so heißt

$$\deg A := d$$

[51] Es muß lediglich vorausgesetzt werden, daß das Zentrum $Z(A)$ in dem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper $\overline{k}$, der der Skalarbereich aller betrachteten Varietäten ist, enthalten ist.

der *Grad* von A. Ist $A \cong \operatorname{Mat}_r D$ wie oben und $\dim D = s^2$, so heißt

$$\operatorname{ind} A := s$$

der *Index* von A.

Definition. Zwei zentraleinfache k-Algebren $A \cong \operatorname{Mat}_r D$ und $B \cong \operatorname{Mat}_s D'$ heißen *äquivalent* (in Zeichen $A \sim B$), wenn D und D' isomorph sind.

Sei A eine einfache, endlichdimensionale k-Algebra. Zunächst wird gezeigt, daß dann die Voraussetzung des letzten Kapitels in vielen Fällen erfüllt ist.

Lemma 4.3. *Ist $Z(A)$ als k-Algebra endlich erzeugt, so gibt es eine endliche*[52] *Teilmenge $T \subseteq A^*$ aus invertierbaren Elementen mit $k[T] = A$.*

Beweis. Ist $T \subseteq A^*$ mit $Z(A)[T] = A$ und $Z(A) = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ mit $\alpha_i \neq 0$, so ist

$$T' := \left\{ t\alpha_i \mid t \in T, i = 1, \ldots, r \right\}$$

eine Teilmenge von A^* mit $k[T'] = A$. Es kann also $k = Z(A)$ angenommen werden. A ist zentraleinfach über dem Zentrum $Z(A)$. Sei o. E. $A = \operatorname{Mat}_r D$ zentraleinfach, D eine k-Divisionsalgebra und $k = Z(A)$.
Zeige, daß es sogar eine k-Vektorraumbasis von A aus invertierbaren Elementen gibt. Sei $\{d_i\}$ eine k-Vektorraumbasis von D. Falls es eine k-Vektorraumbasis $\{e_j\}$ von $\operatorname{Mat}_r k$ aus invertierbaren Elementen gibt, so ist $\{e_j \otimes d_i\}$ solch eine Menge T. Es reicht also, die Behauptung für $\operatorname{Mat}_r k$ mit $r \geq 2$ zu zeigen. Sei $e_{i,j} \in \operatorname{Mat}_r k$ die Matrix, die an der Position (i, j) eine Eins und sonst Nullen als Einträge hat, und E_r die Einheitsmatrix in $\operatorname{Mat}_r k$. Definiere:

$$\begin{aligned} E_{i,j} &:= E_r + e_{i,j} \quad \text{für } i \neq j, \\ D_i &:= E_{i,i} - e_{i,i} + e_{i,i-1} + e_{i-1,i} \quad \text{für } i \geq 2, \end{aligned}$$

d.h.

$$E_{i,j} = \begin{array}{c@{}l} \begin{array}{cccc} & & \overset{j}{\downarrow} & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad D_i = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

---

[52]Tatsächlich ist die Endlichkeit der Menge T für den Beweis, daß darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten abgeschlossen sind, nicht notwendig, so daß die entsprechende Voraussetzung des Lemmas fallen gelassen werden könnte. Sie dient nur der Vereinfachung.

Dann ist $\{E_r, E_{i,j}, D_l \mid i \neq j, l \geq 2\}$ eine linear unabhängige Teilmenge aus invertierbaren Matrizen, die $\mathrm{Mat}_r\, k$ erzeugt. Dies ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, daß die Matrizen

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. □

Sei ab hier jede k-Algebra A darstellbar in der Form $A = k[T]$ mit einer endlichen Menge $T \subseteq A^*$. Nach dem Lemma oben ist diese Voraussetzung für alle zentraleinfachen k-Algebren erfüllt.

Definition. Sei A eine einfache k-Algebra.

i) Ist $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_r\, k$ eine Darstellung, so heißt

$$\deg \theta := r$$

der *Grad* der Darstellung.

ii) Seien $\theta_1 : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n_1}\, k$ und $\theta_2 : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n_2}\, k$ Darstellungen von A. Bezeichne mit $\theta_1 \oplus \theta_2$ die Darstellung

$$\theta_1 \oplus \theta_2 : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n_1+n_2}\, k; \alpha \longmapsto \begin{pmatrix} \theta_1(\alpha) & 0 \\ 0 & \theta_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

iii) Sei $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellung. θ heißt *reduzibel*, falls sich θ schreiben läßt in der Form

$$\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$$

mit Darstellungen θ_1 und θ_2 von A. Anderenfalls heißt θ *irreduzibel.*

iv) Sei $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellung und $r \in \mathbb{N}$. Die auf Seite 52 definierte Darstellung $r\theta$ läßt sich schreiben als

$$r\theta := \underbrace{\theta \oplus \ldots \oplus \theta}_{r\text{-mal}}.$$

Die folgenden Aussagen über einfache Algebren findet man etwa bei Pierce ([33], chaps. 3 & 5) bewiesen:

Satz 4.4. *Sei A eine einfache k-Algebra.*

i) Alle minimalen Linksideale von A sind isomorph, alle irreduziblen Darstellungen von A sind äquivalent.

ii) Ist L ein minimales Linkssideal von A und M ein A-Modul, so gilt

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} L \quad \textit{für ein } r \in \mathbb{N}$$

als Summe von A-Moduln.

iii) Ist $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_n k$ eine Darstellung von A, so gilt

$$\theta \cong r\hat{\theta} \quad \textit{für ein } r \in \mathbb{N}$$

mit einer irreduziblen Darstellung $\hat{\theta}$.

iv) Ist L ein minimales Linksideal und $\hat{\theta}$ eine irreduzible k-Darstellung von A, so gilt

$$\deg \hat{\theta} = \dim_k L.$$

Lemma 4.5. *Sei B eine k-Algebra, A die Matrixalgebra $\operatorname{Mat}_r B$ über B für ein $r \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq B$ ein Linksideal von B der k-Dimension n. Bezeichne mit $\hat{I}$ die zu I k-isomorphe Teilmenge der Matrizen von A, die an der Position $(1,1)$ ein Element aus I und sonst Null als Einträge haben. Dann ist $I' := A\hat{I} \subseteq A$ ein Linksideal von A der Dimension nr. Ist I minimal, so ist I' minimal.*

Beweis. Sei $d_1, \dots, d_n$ eine k-Basis von $\hat{I}$ und e_{ij} die Matrix aus $\operatorname{Mat}_r B$, die an der Position (i,j) eine Eins und sonst Null als Einträge hat. Dann ist

$$e_{11}d_1, e_{11}d_2, \dots, e_{11}d_n, e_{21}d_1, \dots, \dots, \dots, e_{r1}d_n$$

eine k-Basis von $A\hat{I}$, denn: Die Vektoren sind über k linear unabhängig. Sei $(a_{ij})_{ij} \in A$ und $\sum_l \beta_l d_l \in \hat{I}$ mit $\beta_l \in k$. Dann ist

$$(a_{ij})_{ij} \begin{pmatrix} \sum_l \beta_l d_l & \\ & 0 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \sum_l \beta_l d_l & \\ \vdots & 0 \\ a_{11} \sum_l \beta_l d_l & \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1,\dots,r \\ l=1,\dots,n}} a_{i1}\beta_l e_{i1} d_l \,.$$

Sei $I \neq (0)$ minimal und $J \subseteq I'$ ein nichttriviales Linksideal. Sei $a := (a_{ij})_{ij} \in J$. Es ist $a_{ij} = 0$ für alle $j \geq 2$, da $a \in I'$. Dann ist $e_{11}a \in \hat{I}$ und $Be_{11}a \subseteq \hat{I}$. Wäre $Be_{11}a \neq \hat{I}$, so wäre $Ba_{11} \subseteq I$ ein echt kleineres nichttriviales Linksideal, ein Widerspruch zur Minimalität von I. Also ist $\hat{I} \subseteq J$, und somit ist $A\hat{I} \subseteq J \subseteq I' = A\hat{I}$, d. h. $J = I'$. □

Proposition 4.6.

i) Sei A eine zentraleinfache k-Algebra und $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_n k$ eine Darstellung. Ist θ irreduzibel, so gilt

$$\deg \theta \;=\; \deg A \operatorname{ind} A\ .$$

ii) Sei A eine einfache k-Algebra und $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_n k$ eine irreduzible Darstellung. Dann ist die Darstellung

$$\theta^r : \operatorname{Mat}_r A \longrightarrow \operatorname{Mat}_{rn} k;\ a\otimes\alpha \;\longmapsto\; a\otimes\theta(\alpha)$$

irreduzibel.

iii) Sei $I \subseteq A$ ein Linksideal einer zentraleinfachen k-Algebra A. Dann gilt

$$\deg A \;\Big|\; \dim_k I\ .$$

Beweis. i) Sei $A \cong \operatorname{Mat}_r D$ mit einer k-Divisionsalgebra D vom Grad s. Das einzige nichttriviale Linksideal in D ist D selbst. Nach Lemma 4.5 haben dann die minimalen Linksideale in A die Dimension $rs^2 = \deg A \operatorname{ind} A$.
ii) Folgt aus Lemma 4.5.
iii) Klar. □

4.2 Darstellungen einfacher Algebren

In diesem Abschnitt werden die Aussagen über einfache Algebren aus dem vorigen Abschnitt auf die vorliegende Situation angewendet. Da nach Proposition 3.13 für äquivalente Darstellungen die θ-invarianten Grassmann-Varietäten isomorph sind, reicht es also nach Satz 4.4 iii), im Fall einer einfachen k-Algebra A Darstellungen der Form $r\hat{\theta}$ mit einer irreduziblen Darstellung $\hat{\theta}$ zu betrachten.
Sei $\theta = r\hat{\theta}$ eine k-Darstellung von A mit $r \in \mathbb{N}$ und einer irreduziblen Darstellung $\hat{\theta} : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_s k$. Sei $\langle b\rangle \in \operatorname{Grass}_{\theta/k}(n,d)$ mit Zahlen $n, d \in \mathbb{N}$,

wobei $n = rs$ ist, und $b = (b_1| \dots |b_d) \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$, d. h. die b_i sind die Spalten[53] von b. Aus Satz 4.4 folgt, daß

$$\dim\big(\theta(A)b_i\big) = s$$

und

$$\theta(A)b_i \cap \theta(A)b_j \neq \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \theta(A)b_i \;=\; \theta(A)b_j$$

für alle i, j gilt. Es gibt also stets $b^{(i)} \in \mathrm{St}_{n,s}\, k$ für $i = 1, \dots, \nu$ mit $d = \nu s$ und[54]

$$\langle b \rangle = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \langle b^{(i)} \rangle.$$

Dabei kann angenommen werden, das in jeder Matrix $b^{(i)}$ ein Vektor b_j als Spaltenvektor steht. Schreibe die Matrizen $b^{(i)}$ als

$$b^{(i)} = \begin{pmatrix} b^{(i,1)} \\ \vdots \\ b^{(i,r)} \end{pmatrix}$$

mit $b^{(i,j)} \in \mathrm{Mat}_s\, k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle b \rangle \in \mathrm{Grass}_{\theta/k}(n,d) \quad &\Longrightarrow \quad \theta(A)\langle b^{(i)} \rangle \subseteq \langle b^{(i)} \rangle \\ &\Longrightarrow \quad \tilde{\theta}(A)\langle b^{(i,j)} \rangle \subseteq \langle b^{(i,j)} \rangle \end{aligned}$$

für alle $j = 1, \dots, r$.
Sei $b \in \mathrm{St}_{rs,\nu s}\, k$ definiert durch $b^{(i,i)} := E_s$ für $i = 1, \dots, \nu$ und $b^{(i,j)} := 0$ für $i = 1, \dots, \nu$ und $j = 1, \dots, r$ mit $i \neq j$, wobei E_s die Einheits- und 0 die Nullmatrix ist. Dann ist

$$\langle b \rangle \in \mathrm{Grass}_{\theta/k}(rs, \nu s)\ .$$

Diese Überlegungen führen zu

Proposition 4.7. *Sei $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_s\, k$ eine irreduzible Darstellung einer einfachen k-Algebra A, $r, \nu, d \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq r$ und $n := rs$.*

i) $\mathrm{Grass}_{r\theta/k}(n,d) \neq \emptyset \iff s \mid d.$

[53] Vgl. die Definition auf S. 16.

[54] Die direkte Summe ist als Summe von A-Moduln gemeint.

ii) $\operatorname{Grass}_{\theta/k}(s,d) = \begin{cases} \{\langle 0\rangle\}, & \textit{falls } d = 0 \\ \{k^s\}, & \textit{falls } d = s \end{cases}$.

Sei $\langle b\rangle \in \operatorname{Grass}_{r\theta/k}(n,d)$.

iii) Es gibt $b^{(i)} \in \operatorname{St}_{n,s} k$ *mit*

$$\langle b\rangle = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \langle b^{(i)}\rangle \quad \textit{und} \;\; \langle b^{(i)}\rangle \in \operatorname{Grass}_{r\theta/k}(n,s)\ .$$

iv) Mit obigen Bezeichnungen gilt für alle i,j

$$\langle b^{(i,j)}\rangle \in \operatorname{Grass}_{\tilde\theta/k}(s,d_{i,j})$$

mit $d_{i,j} = 0$ *oder* $d_{i,j} = s$.

Nun werden die Morphismen[55] γ und η für Algebren und Darstellungen mit bestimmten Eigenschaften betrachtet. Die in der nächsten Proposition benutzte Eigenschaft einer Darstellung θ, irreduzibel und surjektiv zu sein, wird z.B. von Isomorphismen $\theta : \operatorname{Mat}_s k \longrightarrow \operatorname{Mat}_s k$ erfüllt.

Proposition 4.8. *Seien* $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_s k$ *und* $\theta' : B \longrightarrow \operatorname{Mat}_r k$ *Darstellungen von* k*-Algebren* A *und* B *und* $\nu \in \mathbb{N}$ *mit* $\nu \le r$. *Ist* A *einfach und* θ *irreduzibel und surjektiv, so ist der Morphismus*

$$\begin{array}{rccc} \tilde\gamma : & V_{\theta'/k}(r,\nu) & \longrightarrow & V_{\theta\otimes\theta'/k}(rs,\nu s) \\ & \Psi(b) & \longmapsto & \Psi(E_s \otimes b) \end{array}$$

aus Satz 3.16 surjektiv.

Beweis. Sei $a \in \operatorname{St}_{\theta\otimes\theta'/k}(rs,\nu s)$. Durch die Festsetzung $\alpha u := (\theta(\alpha)\otimes E_r)u$ für $u \in \langle a\rangle$ und $\alpha \in A$ ist $\langle a\rangle$ ein A-Modul. Da $\deg\theta = s$, so ist

$$\langle a\rangle = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \langle a^{(i)}\rangle$$

mit $a^{(i)} \in \operatorname{St}_{rs,s} \overline{k}$. Für $a^{(i)}$ gilt

$$(\theta(\alpha)\otimes E_r)\langle a^{(i)}\rangle \;\subseteq\; \langle a^{(i)}\rangle$$

für $\alpha \in A$. Da θ surjektiv ist, liegen die Matrizen $e_{ij} \in \operatorname{Mat}_s k$, die nur an der Position (i,j) eine Eins und sonst Null als Eintrag haben, im Bild

[55]Siehe Seite 53 bzw. 54.

von θ. Sei $a_i \in \langle a^{(i)} \rangle$ ein beliebiger Vektor ungleich dem Nullvektor und $a_i^j := (e_{j1} \otimes E_r)a_i$ für alle i, j. Dann gilt $a_i^j \in \langle a^{(i)} \rangle$ für alle i, j. Die Vektoren $a_i^1, \ldots, a_i^s$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis von $\langle a^{(i)} \rangle$. Ist $\hat{a}_i$ der Vektor aus k^r, der als Einträge die ersten r Einträge des Vektors a_i hat, so läßt sich die Matrix $(a_i^1 | \ldots | a_i^s)$ schreiben als

$$(a_i^1 | \ldots | a_i^s) = E_s \otimes \hat{a}_i \ .$$

Es ist also $\langle E_s \otimes \hat{a}_i \rangle = \langle a^{(i)} \rangle$. Ist $\hat{a} := (\hat{a}_1 | \ldots | \hat{a}_\nu)$, so ist

$$\langle E_s \otimes \hat{a} \rangle = \langle a \rangle \ .$$

□

Korollar 4.9. *Sei $A = \mathrm{Mat}_s\, k$ und $\hat{\theta} : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_s\, k$ eine irreduzible Darstellung, d. h. ein Isomorphismus. Dann ist der Morphismus*

$$\tilde{\gamma} : V_k(r, \nu) \ \longrightarrow \ V_{r\hat{\theta}}(rs, \nu s); \Psi(a) \longmapsto \Psi(E_s \otimes a)$$

surjektiv.

Beweis. Die Aussage folgt aus Proposition 4.8: Sei $B := \{0\}$ trivial und $\theta' : 0 \longmapsto E_r$. Dann ist $V_{\theta'/k}(r, \nu) = V_k(r, \nu)$ und $\hat{\theta} \otimes \theta' = r\hat{\theta}$. □

Satz 4.10. *Ist $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellung einer einfachen k-Algebra A, so sind $\mathrm{St}_{\theta/k}(n, d)$ und $V_{\theta/k}(n, d)$ irreduzibel.*

Beweis. A ist zentraleinfach über dem Zentrum $Z(A)$. Da sich die geometrischen Eigenschaften der hier betrachteten Varietäten bei Skalarerweiterung nicht ändern, kann o. E. $Z(A) = k$ angenommen werden. Sei K ein Zerfällungskörper von A. Dann gilt $\mathrm{Mat}_s\, K \cong A \otimes_k K$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Sei $g : \mathrm{Mat}_s\, K \longrightarrow A \otimes_k K$ ein Isomorphismus. Die Darstellung $\theta_K : A \otimes_k K \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, K$ von A induziert eine Darstellung $\theta^* := \theta_K \circ g$ von $\mathrm{Mat}_s\, k$, die nach Satz 4.4 iii) äquivalent zu einer Darstellung der Form $\theta^* = r\hat{\theta}$ mit einer irreduziblen Darstellung $\hat{\theta}$ ist. Die Darstellung $\hat{\theta}$ ist nach Lemma 4.5 vom Grad s, also ein Isomorphismus $\hat{\theta} : \mathrm{Mat}_s\, K \longrightarrow \mathrm{Mat}_s\, K$. Damit gilt

$$V_{\theta/k}(n, d) = V_{\theta_K/K}(n, d) \cong V_{\theta^*/K}(n, d) \cong V_{r\hat{\theta}/k}(n, d).$$

Es ist $n = rs$. Ist s kein Teiler von d, so ist $V_{\theta/k}(n, d)$ leer. Sei also $d = \nu s$. Nach Korollar 4.9 ist der Morphismus

$$\tilde{\gamma} : V_k(r, \nu) \ \longrightarrow \ V_{r\hat{\theta}}(rs, \nu s); \Psi(a) \longmapsto \Psi(E_s \otimes a)$$

surjektiv. Da $V_k(r, \nu)$ nach Satz 3.7 irreduzibel ist, ist es auch $V_{r\hat{\theta}/k}(n, d)$ und somit auch $V_{\theta/k}(n, d)$. Da $\mathrm{St}_{\theta/k}(n, d) := \Psi^{-1}\big(V_{\theta/k}(n, d)\big)$ ist (vgl. die Definition auf Seite 44), ist auch $\mathrm{St}_{\theta/k}(n, d)$ irreduzibel. □

Satz 4.11. *Seien $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_s\, k$ und $\theta' : B \longrightarrow \mathrm{Mat}_r\, k$ Darstellungen von k-Algebren A und B und $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq r$. Ist A einfach und θ irreduzibel und surjektiv, so ist der Morphismus*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\gamma}: & V_{\theta'/k}(r,\nu) & \longrightarrow & V_{\theta\otimes\theta'/k}(rs,\nu s) \\ & \Psi(b) & \longmapsto & \Psi(E_s \otimes b) \end{array} .$$

ein über k definierter Isomorphismus.

Beweis. Nach Proposition 3.16, Proposition 4.8 und Satz 4.10 ist

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \mathrm{St}_{\theta'/k}(r,\nu) & \longrightarrow & \mathrm{St}_{\theta\otimes\theta'/k}(rs,\nu s) \\ & b & \longmapsto & E_s \otimes b \end{array}$$

ein verträglicher Morphismus irreduzibler Varietäten, so daß der induzierte Morphismus $\tilde{\gamma}$ bijektiv ist. Deshalb ist $\tilde{\gamma}$ nach Satz 3.11 ein Isomorphismus. $\square$

Dieser Satz führt zu den folgenden Korollaren:

Korollar 4.12. *Sei $\theta' : B \longrightarrow \mathrm{Mat}_r\, k$ eine Darstellung einer k-Algebra B und $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq r$. Dann ist*[56]

$$\begin{array}{rccc} \theta'^s: & \mathrm{Mat}_s\, B & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{rs}\, k \\ & a \otimes \beta & \longmapsto & a \otimes \theta'(\beta) \end{array}$$

mit $a \in \mathrm{Mat}_s\, k$ und $\beta \in B$ eine Darstellung von $\mathrm{Mat}_s\, B$ und es gilt

$$V_{\theta'/k}(r,\nu) \cong_k V_{\theta'^s/k}(rs,\nu s) .$$

Korollar 4.13. *Sei $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellungen einer einfachen k-Algebra A. Sei $\theta \cong r\hat{\theta}$ mit einer irreduziblen Darstellung $\hat{\theta} : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_s\, k$. Dann ist $n = rs$. Sei $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq r$. Ist $\hat{\theta}$ surjektiv, so gilt*

$$V_k(r,\nu) \cong_k V_{\theta/k}(rs,\nu s) .$$

4.3 Invarianzvarietäten von einfachen Algebren

Die Beschreibung von Invarianzvarietäten in Abschnitt 3.3 durch Eigenräume wird in diesem Abschnitt fortgesetzt. Dort wurde gezeigt, daß Invarianzvarietäten stets als Projektivierung der Vereinigung von Untervektorräumen von $\bigwedge^d k^n$ geschrieben werden können:

$$\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d) = \mathbf{P} \bigcup_{\Lambda \in L} U_\Lambda \quad \text{mit } U_\Lambda = \bigcap_{\alpha \in T} \mathrm{Eig}_{\lambda_\alpha} \tilde{\theta}(\alpha),$$

[56] Vgl. die Definition ii) auf Seite 52.

wobei L die Menge aller Tupel $\Lambda = (\ \lambda_\alpha \mid \alpha \in T)$ von Eigenwerten λ_α zu den Matrizen $\tilde{\theta}(\alpha)$ ist. Es wird sich zeigen, daß, wenn A einfach ist, bei der Bestimmung der θ-invarianten Grassmann-Varietät $V_{\theta/k}(n,d)$ als Durchschnitt

$$V_k(n,d) \cap \mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d)$$

nur ein spezieller Untervektorraum U_{Λ_0} relevant ist, denn $V_{\theta/k}(n,d)$ ist in $\mathbf{P}U_{\Lambda_0}$ enthalten. Diese Varietät $\mathbf{P}U_{\Lambda_0}$ wird reduzierte Linksidealvarietät genannt.

Sei A eine einfache k-Algebra, $\hat{\theta} : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_s\, k$ eine irreduzible Darstellung von A und $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_{rs}\, k$ eine beliebige Darstellung mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nach Satz 4.4 iii) eine Matrix $a \in \mathrm{GL}_{rs}\, k$ mit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Mat}_{rs}\, k \\ \hat{\theta}\ \Big\downarrow & & \Big\uparrow\ a^{-1}.\ a \\ \mathrm{Mat}_s\, k & \xrightarrow[r\cdot]{} & \mathrm{Mat}_{rs}\, k\ , \end{array}$$

d. h. $\theta(\alpha) = a^{-1}(r\hat{\theta})(\alpha)a$ für alle $\alpha \in A$. Dann gilt für $b \in \mathrm{St}_{rs,\nu s}\, k$ und für $\alpha \in A^*$

$$\begin{aligned} \alpha \wedge b = \lambda_\alpha \wedge b \text{ für ein } \lambda_\alpha \in k & \\ \iff\quad & \theta(\alpha)b = bc \quad \text{ für ein } c \in \mathrm{GL}_{\nu s}\, k \\ \iff\quad & a^{-1}(r\hat{\theta})(\alpha)ab = bc \quad \text{ für ein } c \in \mathrm{GL}_{\nu s}\, k \\ \iff\quad & (r\hat{\theta})(\alpha)ab = abc \quad \text{ für ein } c \in \mathrm{GL}_{\nu s}\, k\ . \end{aligned}$$

Für die Werte λ_α kommen nur Eigenwerte der Matrix[57] $\tilde{\theta}(\alpha)$ in Frage. Es wird nun gezeigt, daß für λ_α nur ein Wert in Frage kommt.

Ist $\langle b\rangle \in \mathrm{Grass}_{\theta/k}(rs,\nu s)$, so ist $\langle ab\rangle \in \mathrm{Grass}_{r\hat{\theta}/k}(rs,\nu s)$, und $\langle ab\rangle$ läßt sich wie in Proposition 4.7 schreiben als

$$\langle ab\rangle = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \langle b^{(i)}\rangle$$

mit $b^{(i)} \in \mathrm{St}_{rs,s}\, k$. Es gibt also eine Matrix $\tilde{c} \in \mathrm{GL}_{\nu s}\, k$, so daß $ab\tilde{c} = \tilde{b}$ mit $\tilde{b} := (b^{(1)}|\ldots|b^{(\nu)}) \in \mathrm{St}_{rs,\nu s}\, k$ gilt. Da die Untervektorräume $\langle b^{(i)}\rangle$ invariant

[57] Siehe dazu Abschnitt 3.3. Zur Definition von $\tilde{\theta}$ siehe Bemerkung 2.5.

unter der Operation von A durch $r\hat{\theta}$ sind, gibt es Matrizen $c_i \in \mathrm{GL}_s\, k$, so daß

$$r\hat{\theta}(\alpha)b^{(i)} = b^{(i)}c_i$$

für $i = 1, \ldots, \nu$. Da es immer ein $M \in \mathcal{M}_{s,rs}$ gibt, so daß $\left(r\hat{\theta}(\alpha)b^{(i)}\right)_M = \hat{\theta}(\alpha)(b^{(i)}_M)$ und $\det b^{(i)}_M \neq 0$ gilt, ist auch stets

$$\det \hat{\theta}(\alpha) = \det c_i.$$

Definiere

$$c^\circ = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & c_\nu \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$r\hat{\theta}(\alpha)\tilde{b} = \tilde{b}c^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad r\hat{\theta}(\alpha)ab\tilde{c} = ab\tilde{c}c^\circ$$

und damit ist $c = \tilde{c}c^\circ\tilde{c}^{-1}$, d. h.

$$\det c = \det c^\circ = \det \hat{\theta}(\alpha)^\nu .$$

Nach Proposition 2.6 ist $\lambda_\alpha = \det c$. Es folgt

Satz 4.14. *Sei A einfach und $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine Darstellung. Sei $\theta \cong r\hat{\theta}$, wobei $\hat{\theta} : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_s\, k$ eine irreduzible Darstellung ist. Dann ist $n = rs$. Sei $d = \nu s \in \mathbb{N}$ mit $d \leq n$. Dann gibt es für jedes $\alpha \in T$ einen Eigenwert λ_α der Matrix*[58] *$\tilde{\theta}(\alpha)$, so daß gilt*

$$V_{\theta/k}(n,d) \subseteq \mathbf{P} \bigcap_{\alpha \in T} \mathrm{Eig}_{\lambda_\alpha} \tilde{\theta}(\alpha) ,$$

nämlich $\lambda_\alpha = \det \hat{\theta}(\alpha)^\nu$.

Definition. Die Varietät

$$\widetilde{\mathrm{Inv}}^T_{\theta/k}(n,d) \ := \ \mathbf{P} \bigcap_{\alpha \in T} \mathrm{Eig}_{\det \hat{\theta}(\alpha)^\nu} \tilde{\theta}(\alpha)$$

heißt *reduzierte Invarianzvarietät* .

[58] Zur Definition von $\tilde{\theta}$ siehe Bemerkung 2.5.

Korollar 4.15.

$$V_{\theta/k}(n,d) = V_k(n,d) \cap \widetilde{\mathrm{Inv}}^T_{\theta/k}(n,d).$$

Ist A zentraleinfach, so läßt sich $\det\hat{\theta}$ als reduzierte Norm deuten: Ist A zentraleinfach und K ein Zerfällungskörper von A, so gibt es einen Isomorphismus $A \otimes_k K \cong \mathrm{Mat}_n K$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Schränkt man diesen Isomorphismus auf $A \cong A \otimes_k 1_K$ ein, so erhält man eine sogenannte *Zerfällungsdarstellung* $\psi : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n K$ von A. Die Abbildung

$$\mathrm{Nred}_{A/k} : A \longrightarrow k; \alpha \longmapsto \det\psi(\alpha)$$

ist von der Wahl des Zerfällungskörpers und von ψ unabhängig und heißt *reduzierte Norm* von A.[59]
Sei nun A eine zentraleinfache k-Algebra vom Grad $\deg A = d$, K ein Zerfällungskörper und $\hat{\theta} : A_K \longrightarrow \mathrm{Mat}_d K$ ein Isomorphismus mit $A_K := A \otimes_k K$. Ist $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_{rd}\, k$ eine beliebige Darstellung, so folgt aus Satz 4.14

Korollar 4.16. *Ist A zentraleinfach, so gilt*

$$\widetilde{\mathrm{Inv}}^T_{\theta/k}(rd,\nu d) \;=\; \mathbf{P} \bigcap_{\alpha\in T} \mathrm{Eig}_{\mathrm{Nred}\,\alpha^\nu}\, \tilde{\theta}(\alpha),$$

d. h.

$$\det\hat{\theta}(\alpha) = \mathrm{Nred}_{A/k}(\alpha)\ .$$

Beweis.

$$\det\hat{\theta}(\alpha) = \mathrm{Nred}_{A_K/K}(\alpha\otimes 1_K) = \mathrm{Nred}_{A/k}(\alpha).$$

Die rechte Gleichung ist ein allgemeiner Satz über das Verhalten der reduzierten Norm bei Skalarerweiterung, siehe z. B. Pierce [33], p. 296, Corollary b. □

4.4 Eigenschaften von darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten zentraleinfacher Algebren

Sei in diesem Abschnitt A eine zentraleinfache k-Algebra vom Grad d. Seien $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \le \mu$ und sei

$$\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mu d}\, k$$

[59] Zur Definition und zu den Eigenschaften der reduzierten Norm siehe Pierce [33], chap. 16, oder Draxl [13], par. 22.

eine k-Darstellung von A. Ziel dieses Abschnitts ist, einige grundlegende Eigenschaften der darstellungsinvarianten Grassmann-Varietät

$$V_{\theta/k}(\mu d, \nu d)$$

zu beweisen.

Bemerkung 4.17. Eine irreduzible Darstellung von A hat nach Proposition 4.6 i) den Grad $\deg A \operatorname{ind} A$. Demnach ist $\operatorname{ind} A$ ein Teiler von μ.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine Zahl und K/k eine Körpererweiterung. K heißt $\frac{1}{m}$*-Zerfällungskörper*[60] von A, wenn $\operatorname{ind}(A \otimes_k K)$ ein Teiler von m ist.

Ein Erweiterungskörper K/k ist ein Zerfällungskörper, wenn der Index von $A \otimes_k K$ gleich Eins ist, d. h. ein Zerfällungskörper ist ein $\frac{1}{1}$-Zerfällungskörper. Ein Zerfällungskörper ist immer auch ein $\frac{1}{\nu}$-Zerfällungskörper. Es gibt also für zentraleinfache Algebren stets $\frac{1}{\nu}$-Zerfällungskörper (siehe Satz 4.2 ii)). Ist K/k ein beliebiger Erweiterungskörper, so wird die Abkürzung

$$A_K := A \otimes_k K$$

verwendet.

Satz 4.18. *Sei K/k ein $\frac{1}{\nu}$-Zerfällungskörper von A und $A_K \cong \operatorname{Mat}_r D$ mit einer K-Divisionsalgebra D vom Grad s und $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $\mu', \nu' \in \mathbb{N}$ mit $\nu = \nu' s$ und $\mu = \mu' s$, und es gilt* [61]

i) $V_{\theta/k}(\mu d, \nu d) \;\cong_K\; V_D(\mu', \nu')$.

ii) $V_D^M(\mu', \nu') \;\cong_K\; \mathbf{A}^{(\mu-\nu)\nu}$.

Beweis. Die Teilbarkeit von μ durch s folgt aus obiger Bemerkung, diejenige von ν durch s ist vorausgesetzt. Sei $\theta_D : D \longrightarrow \operatorname{Mat}_{s^2} K$ eine reguläre Darstellung von D. Da θ_D irreduzibel ist, ist die Darstellung

$$\theta_D^r : \operatorname{Mat}_r D \longrightarrow \operatorname{Mat}_{rs^2} K; (a_{ij})_{ij} \longmapsto \big(\theta_D(a_{ij})\big)_{ij}$$

nach Proposition 4.6 ii) auch irreduzibel. Wegen $A_K \cong \operatorname{Mat}_r D$ ist $\theta_K \cong \mu'(\theta_D^r) \cong (\mu'\theta_D)^r$. Damit gilt

$$V_{\theta/k}(\mu d, \nu d) \;\cong_k\; V_{\theta_K/K}(\mu d, \nu d) \;\cong_K\; V_{(\mu'\theta_D)^r/K}(\mu' r s^2, \nu' r s^2).$$

[60]Diese Bezeichnung stammt nach Blanchet ([5], p. 98) von Jacobson (ohne weiteren Verweis).

[61]M sei der Index $(1, \ldots, \nu' s^2) \in \mathcal{M}_{\nu' s^2, \mu' s^2}$.

Nach Definition ist

$$V_D(\mu', \nu') \;=\; V_{\mu'\theta_D/K}(\mu' s^2, \nu' s^2).$$

Nach Korollar 4.12 gilt

$$V_{\mu'\theta_D/K}(\mu' s^2, \nu' s^2) \;\cong_K\; V_{(\mu'\theta_D)^r/K}(\mu' s^2 r, \nu' s^2 r)$$

und i) folgt. Mit $M := (1, \ldots, \nu' s^2) \in \mathcal{M}_{\nu' s^2, \mu' s^2}$ folgt ii) aus Satz 3.19:

$$V_D^M(\mu', \nu') \;=\; V^M_{\mu'\theta_D/K}(\mu' s^2, \nu' s^2) \;\cong_K\; \operatorname{Mat}_{(\mu'-\nu')s^2, \nu'} \overline{k}\,.$$

$\square$

Korollar 4.19. *$V_{\theta/k}(\mu d, \nu d)$ ist Twistung der Grassmann-Varietät $V_k(\mu, \nu)$.*

Beweis. Sei K ein Zerfällungskörper von A. Dann ist $A_K \cong \operatorname{Mat}_d K$ und nach Satz 4.18 i) gilt

$$V_{\theta/k}(\mu d, \nu d) \;\cong_K\; V_k(\mu, \nu).$$

$\square$

Korollar 4.20. $\dim V_{\theta/k}(\mu d, \nu d) = \nu(\mu - \nu)$.

Beweis. Folgt aus Satz 4.18 ii). $\square$

Es folgt der angekündigte Satz, der einen Zusammenhang zwischen dem Zerfall einer zentraleinfachen Algebra A über einem Körper K/k und der Existenz von K-rationalen Punkten der darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten $V_{\theta/k}(\mu d, \nu d)$ herstellt, insbesondere in Form der beiden folgenden Korollare.

Satz 4.21. *Für eine Körpererweiterung K/k sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *$V_{\theta/k}(\mu d, \nu d)$ hat einen K-rationalen Punkt.*

ii) *K ist ein $\frac{1}{\nu}$-Zerfällungskörper von A.*

iii) $\operatorname{ind}(A \otimes_k K) \;\big|\; \nu$.

iv) *$K(V_{\theta/k}(\mu d, \nu d))/K$ ist rein transzendente Körpererweiterung.*

Beweis. „i) $\Longrightarrow$ ii)": Hat $V_{\theta/k}(\mu d, \nu d) \cong V_{\theta_K/K}(\mu d, \nu d)$ einen K-rationalen Punkt, so gibt es ein Element $\langle b\rangle \in \mathrm{Grass}_{\theta_K/K}(\mu d, \nu d)$. Der Grad einer irreduziblen Darstellung von A ist nach Proposition 4.6 i) gleich $\operatorname{ind} A \deg A = d \operatorname{ind} A$, und nach Proposition 4.7 i) teilt er νd.
„ii) $\Longrightarrow$ iii)": Definition.
„iii) $\Longrightarrow$ iv)": Ist K/k ein $\frac{1}{\nu}$-Zerfällungskörper von A, so folgt aus Satz 4.18, daß $V_{\theta/k}(\mu d, \nu d)$ und $\mathbf{A}^{(\mu-\nu)\nu}$ über K birational äquivalent sind.
„iv) $\Longrightarrow$ i)": Klar.

$\square$

Für eine zentraleinfache k-Algebra A, eine reguläre Darstellung $\theta_A : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_{d^2}\, k$ und eine Zahl $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq \deg A$ wird mit

$$V_{A,\nu} := V_{\theta_A/k}(d^2, \nu d)$$

die Brauer-Severi-Varietät von A vom Rang ν bezeichnet (siehe Abschnitt 3.2). Sei $V_A := V_{A,1}$.

Korollar 4.22. *Für eine Körpererweiterung K/k sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $V_{A,\nu}$ hat einen K-rationalen Punkt.

ii) K ist $\frac{1}{\nu}$-Zerfällungskörper von A.

Korollar 4.23. *Für eine Körpererweiterung K/k sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) V_A hat einen K-rationalen Punkt.

ii) K ist Zerfällungskörper von A.

iii) $A \otimes_k K \cong \mathrm{Mat}_d\, K$.

Teil II

Linksidealvarietäten von verschränkten Gruppenalgebren

Kapitel 5

Linksidealvarietäten von Gruppenalgebren

Bei der Definition von darstellungsinvarianten Grassmann-Varietäten treten Invarianzvaritäten auf (siehe Seite 37), die folgendermaßen durch eine Menge von Gleichungen definiert werden:

$$\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n,d) := \mathrm{Z}\left(\left\{B^{\alpha}_{M,N}(x) \mid M,N \in \mathcal{M}_d, \alpha \in T\right\}\right).$$

Diese Menge ist im allgemeinen recht groß. Sie besteht zum Beispiel im Fall der Linksidealvarietät $L^T_{A,1}$ einer Symbolalgebra vom Grad 3 (für die $|T| = 2$ ist, siehe Abschnitt 6.3) aus $2 \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{9}{3} = 14112$ Gleichungen.[62]
Das Ziel dieses Kapitels ist es, eine überschaubarere Beschreibung von Invarianzvarietäten für den Fall zentraleinfacher verschränkter Gruppenalgebren zu finden (siehe Sätze 5.13 und 5.14). Dabei werden allerdings nur die Invarianzvarietäten von regulären Darstellungen betrachtet, d. h. die Linksidealvarietäten.

5.1 Verschränkte Gruppenalgebren

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und $(s) \in \mathrm{H}^2(G, k^*)$ eine 2-Kozykelklasse, wobei G trivial auf k^* operiert. Sei s ein normierter Repräsentant[63] von (s), und A die verschränkte Gruppenalgebra $(G, s)_k$

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G} k e_\sigma\ , \quad e_\sigma e_\tau := s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau} \quad (\sigma, \tau \in G).$$

[62]Natürlich lassen sich schnell einige Gleichungen, die mehrfach auftreten, wegstreichen, aber die Anzahl bleibt im allgemeinen groß.

[63]D. h. es gilt $s_{\sigma,1} = 1 = s_{1,\sigma}$ für alle $\sigma \in G$.

Im folgenden werden einige Tatsachen aufgelistet, die hier im Zusammenhang mit verschränkten Gruppenalgebren wichtig werden.

Bemerkung 5.1.

i) Das Einselement von A ist e_{1_G}, da: $e_\sigma e_1 = s_{\sigma,1} e_\sigma = e_\sigma$.

ii) Die Elemente e_σ sind invertierbar: $e_\sigma(s^{-1}_{\sigma,\sigma^{-1}} e_{\sigma^{-1}}) = e_1$.

Satz 5.2. *Sei A eine zentraleinfache k-Algebra vom Grad d und $a \in A^*$ ein invertierbares Element. Dann gilt für die k-Unteralgebra $E := k[a] \subseteq A$*

$$\dim_k E \leq d.$$

Beweis. Aus den Rechenregeln für das Tensorprodukt folgt, daß für eine Körpererweiterung K/k

$$k[a] \otimes_k K \;\cong\; K[a \otimes 1] \subseteq A \otimes_k K$$

und damit $\dim_k k[a] = \dim_K K[a \otimes 1]$ gilt. Sei also o. E. k algebraisch abgeschlossen. Sei $f := \mathrm{Mipo}_k(a)$ das Minimalpolynom von a in A, $r := \mathrm{grad}(f) = \dim_k E$ und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Nullstellen von f in k. Betrachte den Isomorphismus $\theta : E \longrightarrow k \times \ldots \times k$, der gegeben ist durch die Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} k[a] & \longrightarrow & k[t]/(f) & \longrightarrow & k[t]/(t-\alpha_1) \times \ldots \times k[t]/(t-\alpha_r) \\ a & \longmapsto & t + (f) & \longmapsto & \big(t + (t-\alpha_1), \dots, t + (t-\alpha_r)\big) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} k[t]/(t-\alpha) & \longrightarrow & k\ . \\ t & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

Seien $e_i \in E$ die Urbilder der 1 in der i-ten Komponente von $k \times \ldots \times k$ unter θ, i=1,...,r. Diese e_i sind paarweise orthogonale Idempotente von A, d. h. es gilt

$$e_i^2 = e_i \quad \text{und} \quad e_i e_j = 0 \text{ für } i \neq j\ .$$

Dann ist für $i \neq j$ der Durchschnitt zweier Linksideale Ae_i und Ae_j gleich (0), denn: Sei $i \neq j$ und $b \in Ae_i \cap Ae_j$, d.h. $b = b'e_i = b''e_j$. Dann ist

$$be_i = b'e_ie_i = b'e_i = b''e_je_i = 0,$$

d. h. $b = b'e_i = 0$. Dann ist

$$\bigoplus_{i=1}^{r} Ae_i \subseteq A$$

ein Linksideal von A. Nach Proposition 4.6 iii) ist $\dim_k Ae_i \geq \deg A$, und deshalb ist $r \leq d$. $\square$

Korollar 5.3. *Sei $A := (G, s)_k$ eine verschränkte Gruppenalgebra. Es gilt*

$$A \text{ zentraleinfach} \implies \exp G \leq \deg A .$$

Beweis. Sei $\sigma \in G$. Dann ist $\operatorname{ord}_G \sigma = \dim_k k[e_\sigma] \leq \deg A$. □

Ein wichtiges Problem ist es, eine Übersicht über zentraleinfache verschränkte Gruppenalgebren zu gewinnen. Dieses Problem ist für eine größere Klasse von Algebren behandelt worden, nämlich für *projektive Schur-Algebren*: Eine zentraleinfache k-Algebra heißt projektive Schur-Algebra, falls sie als homomorphes Bild einer verschränkten Gruppenalgebra geschrieben werden kann. Die von den Klassen, die projektive Schur-Algebren enthalten, erzeugte Untergruppe $\mathrm{PS}(k) \leq \mathrm{Br}(k)$ der Brauergruppe heißt *projektive Schur-Gruppe* von k. Ist k ein Zahlkörper, so gilt[64]

$$\mathrm{PS}(k) = \mathrm{Br}(k).$$

Allerdings gibt es auch Beispiele von Körpern k, für die gilt[65]

$$\mathrm{PS}(k) \neq \mathrm{Br}(k).$$

Insbesondere lassen sich also nicht alle zentraleinfachen Algebren als verschränkte Produkte schreiben.
Einfache Beispiele für zentraleinfache verschränkte Gruppenalgebren stellen Symbolalgebren dar.[66] Diese lassen sich nämlich als verschränkte Gruppenalgebren über Gruppen der Form $\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$ schreiben.[67]
Liegt eine zentraleinfache Algebra A in einer speziellen Form vor, so lassen sich unter Umständen Kriterien dafür angeben, ob sich A als verschränkte Gruppenalgebra schreiben läßt. Siehe auch Seite 96.
Bei Iwahori / Matsumoto ([21], Lemma 5.1) ist ein Kriterium angegeben, wann für eine Gruppe G ein Kozykel c mit $(c) \in \mathrm{H}^2(G, k^*)$ existiert, so daß $(G, c)_k$ zentraleinfach ist. Dort finden sich auch zwei Beispiele[68] von Gruppen, für die es Kozykel c gibt, so daß die zugehörige verschränkte Gruppenalgebra zentraleinfach ist, und zwar für $G = A_4 \times \mathbb{Z}_3$, wobei $A_4 \leq \mathcal{S}_4$ die alternierende Gruppe vom Grad 4 ist, und für $G = D_4 \times \mathbb{Z}_2$ mit der Diedergruppe D_4.

[64] Siehe Lorenz / Opolka [30], Satz 3.
[65] Siehe Aljadeff / Sonn [2].
[66] Siehe Abschnitt 6.2.
[67] Siehe Seite 103.
[68] Example 1. & 2.

5.2 Induzierte Operation

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, auf der eine beliebige lineare Ordnung „$<$“ definiert ist. Sei $(s) \in \mathrm{H}^2(G, k^*)$ eine 2-Kozykelklasse mit normiertem Repräsentanten s und A die verschränkte Gruppenalgebra $(G, s)_k$. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m < n$. Die Elemente $e_M := e_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma_m}$ mit $M = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \mathcal{M}_{m,G}$ bilden eine k-Basis von $\bigwedge^m A$, wobei $\mathcal{M}_{m,G}$ wie in Abschnitt 2.1 die Menge der bezüglich „$<$“ geordneten m-Tupel von verschiedenen Elementen aus G bezeichnet.
Die Linksmultiplikation in G induziert eine Operation von G auf $\mathcal{M}_m := \mathcal{M}_{m,G}$ durch

$$\sigma M := \overline{(\sigma\sigma_1, \ldots, \sigma\sigma_m)} \in \mathcal{M}_m \tag{$*$}$$

mit $M = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \mathcal{M}_m$ und $\sigma \in G$. Definiere für $M = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \mathcal{M}_m$ und $\sigma \in G$ die Faktoren

$$s_\sigma(M) := \operatorname{sign}_\sigma(M) \prod_{i=1}^m s_{\sigma,\sigma_i} \quad ,$$

wobei $\operatorname{sign}_\sigma(M) := \operatorname{sign} \pi$ mit $\pi \in \mathcal{S}_m$, so daß $\sigma\sigma_{\pi(1)} < \ldots < \sigma\sigma_{\pi(m)}$. Die Linksmultiplikation mit Basiselementen e_σ in A

$$e_\sigma e_\tau = s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau}$$

läßt sich beschreiben als eine Operation von G auf der Menge der Basisindizes, die aus den Elementen von G besteht, zusammen mit einer Multiplikation mit einem Skalar. Analog läßt sich die in Abschnitt 3.1 definierte induzierte Operation von A auf $\bigwedge^m A$

$$A \times \bigwedge^m A \longrightarrow \bigwedge^m A;\ (a, w) \longmapsto a \cdot w$$

mit

$$a \cdot w := \sum_i a u_{i,1} \wedge \ldots \wedge a u_{i,m}$$

für $w = \sum_i u_{i,1} \wedge \ldots \wedge u_{i,m} \in \bigwedge^m A$ und $a \in A$ beschreiben durch obige Operation $(*)$ von G auf $\mathcal{M}_m$ und eine Multiplikation mit einem Skalar, und zwar folgendermaßen:

Bemerkung 5.4. Für $\sigma \in G$ und $M \in \mathcal{M}_m$ gilt

$$e_\sigma \cdot e_M = s_\sigma(M)\, e_{\sigma M}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
e_\sigma \cdot e_M &= e_\sigma e_{\sigma_1} \ \wedge \ldots \wedge \ e_\sigma e_{\sigma_m} \\
&= s_{\sigma,\sigma_1} e_{\sigma\sigma_1} \wedge \ldots \wedge s_{\sigma,\sigma_m} e_{\sigma\sigma_m} \\
&= \prod_{i=1}^m s_{\sigma,\sigma_i} \big(e_{\sigma\sigma_1} \ \wedge \ldots \wedge \ e_{\sigma\sigma_m} \big) \\
&= \operatorname{sign}_\sigma(M) \prod_{i=1}^m s_{\sigma,\sigma_i} \ e_{\sigma M} \\
&= s_\sigma(M) \ e_{\sigma M}.
\end{aligned}$$

□

Die sich durch die induzierte Operation von G auf den Teilmengen von G ergebende Bahnstruktur spielt eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der zu der Algebra A gehörigen Linksidealvarietät, deshalb folgende

Definition. Sei $\sigma \in G$ und $M \in \mathcal{M}_m$.

$$\begin{aligned}
B_\sigma(M) &:= \big\{ \sigma^i M \mid i \in \mathbb{N}_0 \big\}, \\
B(M) &:= \big\{ \sigma M \mid \sigma \in G \big\}.
\end{aligned}$$

Definiere außerdem für $\sigma, \tau \in G$ und $h := \operatorname{ord} \sigma$ das Tupel

$$B_\sigma(\tau) := \overline{\big(\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{h-1}\tau\big)} \in \mathcal{M}_{h,G}.$$

Lemma 5.5. *Für $\sigma \in G$ und $h := \operatorname{ord} \sigma$ gilt*

$$\prod_{j=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^j\tau} \ 1_A = e_\sigma^h \quad \forall \ \tau \in G.$$

Beweis. Aus

$$\begin{aligned}
e_\sigma e_\tau &= s_{\sigma,\tau} \ e_{\sigma\tau} \\
e_\sigma^2 e_\tau &= s_{\sigma,\tau} s_{\sigma,\sigma\tau} \ e_{\sigma^2\tau} \\
&\ \vdots \\
e_\sigma^h e_\tau &= \prod_{j=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^j\tau} e_{\sigma^h\tau} = \prod_{j=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^j\tau} e_\tau.
\end{aligned}$$

ergibt sich nach Rechtsmultiplikation mit e_τ^{-1} die Aussage. □

Lemma 5.6. *Sei $M \in \mathcal{M}_m$ und $\sigma, \tau \in G$ mit $h := \operatorname{ord} \sigma$. Dann gilt*

i) $\operatorname{sign}_{\sigma\tau}(M) = \operatorname{sign}_\sigma(\tau M) \operatorname{sign}_\tau(M)$,

ii) $\displaystyle\prod_{j=0}^{h-1} \operatorname{sign}_\sigma(\sigma^j M) = 1$,

iii) $\operatorname{sign}_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big) = (-1)^{h-1}$,

iv) Ist $M = N \mathbin{\dot{\cup}} N' \in \mathcal{M}_m$ und sind N und N' invariant unter σ, d. h. $\sigma N = N$ und $\sigma N' = N'$ ist, so gilt

$$\operatorname{sign}_\sigma(M) = \operatorname{sign}_\sigma(N) \operatorname{sign}_\sigma(N').$$

Beweis. i) Sei $M = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Wegen

$$\begin{array}{ccc}
(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) & & \\
\downarrow \tau & & \\
(\tau\sigma_1, \ldots, \tau\sigma_m) & \overset{\sigma}{\longmapsto} & (\sigma\tau\sigma_1, \ldots, \sigma\tau\sigma_m) \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi'' \\
(\tau\sigma_{\pi(1)}, \ldots, \tau\sigma_{\pi(m)}) & & (\sigma\tau\sigma_{\pi''(1)}, \ldots, \sigma\tau\sigma_{\pi''(m)}) \\
\downarrow \sigma & & \| \\
(\sigma\tau\sigma_{\pi(1)}, \ldots, \sigma\tau\sigma_{\pi(m)})) & \overset{\pi'}{\longmapsto} & (\sigma\tau\sigma_{\pi'\pi(1)}, \ldots, \sigma\tau\sigma_{\pi'\pi(m)})
\end{array}$$

ist $\pi'\pi = \pi''$, wobei $\pi, \pi', \pi'' \in \mathcal{S}_m$ die jeweiligen m-Tupel bezüglich der Ordnung auf G sortieren. Aus $\operatorname{sign}_\tau(M) = \operatorname{sign} \pi$, $\operatorname{sign}_\sigma(\tau M) = \operatorname{sign} \pi'$ und $\operatorname{sign}_{\sigma\tau}(M) = \operatorname{sign} \pi''$ folgt die Behauptung.
ii) Aus Teil i) folgt für jedes $l \in \mathbb{N}$ induktiv

$$\prod_{j=0}^{l-1} \operatorname{sign}_\sigma(\sigma^j M) = \operatorname{sign}_{\sigma^l}(M),$$

und damit erhält man

$$\prod_{j=0}^{h-1} \operatorname{sign}_\sigma(\sigma^j M) = \operatorname{sign}_{\sigma^h}(M) = \operatorname{sign}_{\mathrm{id}}(M) = 1.$$

iii) Falls $h = 1$, so ist $\operatorname{sign}_\sigma(B_\sigma(\tau)) = 1$ für jedes $\tau \in G$. Falls $h \neq 1$, so operiert σ auf $B_\sigma(\tau)$, und zwar so, daß kein Element fest bleibt. In Zyklenschreibweise hat σ als Element aus der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}(B_\sigma(\tau))$ also die Form $\sigma = \big(\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{h-1}\tau\big)$ und das Vorzeichen ist $\operatorname{sign}_\sigma(B_\sigma(\tau)) = (-1)^{h-1}$.
iv) Klar. $\square$

Sei A ab hier zentraleinfach. Sei $d = \deg A$ und $m = \mu d$ mit $1 \leq \mu < d$.

Proposition 5.7. *Sei $M_0 \in \mathcal{M}_m$, $\sigma \in G$, $h := \operatorname{ord}\sigma$ und $\hat{h} := \frac{h}{|B_\sigma(M_0)|}$. Dann gilt*

$$\prod_{M \in B_\sigma(M_0)} s_\sigma(M)^{\hat{h}} = \operatorname{Nred}_A e_\sigma^{\mu h}.$$

Beweis. Sei $\alpha := \prod_{j=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^j\tau}$. Nach Lemma 5.5 ist α unabhängig von der Wahl eines bestimmten τ. Außerdem folgt mit Lemma 5.5

$$(\operatorname{Nred}_A e_\sigma)^h = \operatorname{Nred}_A e_\sigma^h = \operatorname{Nred}_A \alpha 1_A = \alpha^d.$$

Da $|B_\sigma(M)|$ ein Teiler von h ist, ergibt sich die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
\prod_{M \in B_\sigma(M_0)} s_\sigma(M)^{\frac{h}{b_\sigma(M)}} \quad &= \quad \prod_{j=0}^{h-1} s_\sigma(\sigma^j M) \quad = \\
\underbrace{\left(\prod_{j=0}^{h-1} \operatorname{sign}_\sigma(\sigma^j M)\right)}_{\substack{=1 \\ \text{nach Lemma 5.6 ii)}}} \prod_{i=1}^{\mu d} \underbrace{\prod_{j=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^j\sigma_i}}_{=\alpha} \quad &= \quad (\operatorname{Nred} e_\sigma)^{\mu h}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 5.8.

i) Sei $\sigma \in G$, $M \in \mathcal{M}_m$ mit $\sigma M = M$. Dann ist $\operatorname{ord}\sigma$ ein Teiler von m und es gilt mit $\nu := \frac{m}{\operatorname{ord}\sigma}$

$$s_\sigma(M) = s_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big)^\nu$$

und

$$s_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big) = (-1)^{\operatorname{ord}(\sigma)-1} \prod_{i=0}^{\operatorname{ord}(\sigma)-1} s_{\sigma,\sigma^i}$$

für beliebiges $\tau \in G$.

ii) Für $M, M' \in \mathcal{M}_m$ mit $\sigma M = M$ und $\sigma M' = M'$ gilt

$$s_\sigma(M_1) = s_\sigma(M_1').$$

Beweis. i) Sei $h := \operatorname{ord}\sigma$ und $\alpha := \prod_{i=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^i\tau}$. Nach Lemma 5.5 ist α unabhängig von der Wahl eines bestimmten τ und so folgt mit Lemma 5.6 iii) die zweite Aussage

$$s_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big) = \operatorname{sign}_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big)\alpha = (-1)^{h-1}\prod_{i=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^i}.$$

Da mit jedem $\rho \in M$ auch alle Bilder unter σ in M liegen müssen, zerfällt M in einzelne Bahnen

$$M = \dot{\bigcup_{\rho\in\mathcal{R}}} B_\sigma(\rho)\ ,$$

wobei jede Bahn h und das Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ genau ν Elemente enthält. Insbesondere ist h ein Teiler von m. Nun ergibt sich unter Verwendung von Lemma 5.6 iv)

$$\begin{aligned} s_\sigma(M) &= \operatorname{sign}_\sigma(M)\prod_{\rho\in M} s_{\sigma,\rho} = \prod_{\rho\in\mathcal{R}}\left(\operatorname{sign}_\sigma\big(B_\sigma(\rho)\big)\prod_{\tau\in B_\sigma(\rho)} s_{\sigma,\tau}\right) \\ &= \big((-1)^{h-1}\alpha\big)^\nu = s_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big)^\nu. \end{aligned}$$

ii) $\quad s_\sigma(M) = \big((-1)^{h-1}\alpha\big)^\nu = s_\sigma(M').$

□

Lemma 5.9. *Falls* $\exp G \mid d$ *gilt, so gibt es für jedes* $\sigma \in G$ *ein* $M \in \mathcal{M}_m$ *mit*

$$\sigma M = M\ .$$

Beweis. Sei $\sigma \in G$ und $h := \operatorname{ord}\sigma$. Dann gilt $h \mid d$, und es gibt sicher $r := \frac{d}{h}$ Elemente $\tau_1, \ldots, \tau_r \in G$, die paarweise disjunkte Bahnen unter σ haben. Dann gilt für jede Bahn $\sigma B_\sigma(\tau_i) = B_\sigma(\tau_i)$, und für

$$M := B_\sigma(\tau_1) \cup \ldots \cup B_\sigma(\tau_r)$$

gilt

$$\begin{aligned} \sigma M &= \sigma B_\sigma(\tau_1) \cup \ldots \cup \sigma B_\sigma(\tau_r) \\ &= B_\sigma(\tau_1) \cup \ldots \cup B_\sigma(\tau_r) \\ &= M\ . \end{aligned}$$

□

5.3 Linksidealvarietäten und Bahnstruktur

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n = d^2$, auf der eine beliebige lineare Ordnung „$<$“ definiert ist, $(s) \in \mathrm{H}^2(G, k^*)$ eine 2-Kozykelklasse mit normiertem Repräsentanten s und A die verschränkte Gruppenalgebra $(G, s)_k$, so daß A zentraleinfach ist. Sei $1 \leq \mu < d$ und $m := \mu d$.
Um die Linksidealvarietäten $L^T_{A,\mu}$ von A besser zu beschreiben, bieten sich zwei Wege an. Einerseits vereinfachen sich in dieser Situation die definierenden Polynome

$$B^\alpha_{M,N}(x) := x_N \sum_{M'} x_{M'} T_\alpha(M', M) - x_M \sum_{N'} x_{N'} T_\alpha(N', N)$$

mit $\alpha \in T$ und $M, N \in \mathcal{M}_m$. Die Faktoren $T_\alpha(M', M) := \det \theta(\alpha)^{M'}_M$ lassen sich auch definieren durch die Gleichung

$$\alpha \cdot e_{M'} = \sum_M T_\alpha(M', M) e_M.$$

In der hier vorliegende Situation kann man $T = \{e_\sigma \mid \sigma \in G_0\}$ wählen, wenn $G_0 \subseteq G$, so daß $G = \langle G_0 \rangle$. Man erhält

$$e_\sigma \cdot e_{M'} = s_\sigma(M') e_{\sigma M'}$$

und damit

$$T_{e_\sigma}(M', M) = \begin{cases} s_\sigma(M') & \text{falls } M = \sigma M' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Polynome nehmen nun folgende Gestalt an:

$$B^\sigma_{M,N}(x) := B^{e_\sigma}_{\sigma M, \sigma N}(x) = s_\sigma(M) x_M x_{\sigma N} - s_\sigma(N) x_{\sigma M} x_N. \qquad (*)$$

Andererseits sind auch die Matrizen der induzierten regulären Operation $\tilde{\theta}$ sehr speziell und bieten einen günstigen Angriffspunkt.
Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden durch Betrachtung der Polynome $(*)$ gefunden. Es stellte sich aber heraus, daß einige der auftretenden Probleme gerade durch diesen Ansatz verursacht werden. Der zweite Ansatz setzt die Deutung der Invarianzbedingung als Eigenwertproblem fort. Konsequenterweise wird auch hier dieser Weg gewählt.
Werde G von $G_0 \subseteq G$ erzeugt, und sei $T := \{e_\sigma | \sigma \in G_0\}$. Die Linksidealvarietät $L^T_{A,\mu}$ ist unabhängig von der konkreten Wahl einer Menge G_0, denn $(e_\sigma e_\tau) \cdot p = e_\sigma \cdot (e_\tau \cdot p)$. Wähle deshalb die Bezeichnung

$$L_{A,\mu} := L^T_{A,\mu}.$$

Für einen Punkt $\overline{k}^*w = \overline{k}^* \sum_M p_M e_M \in \mathbf{P} \bigwedge^m A$ gilt

$$\begin{aligned}
\overline{k}^*w \in L_{A,\mu} &\iff e_\sigma \cdot \overline{k}^*w = \overline{k}^*w \quad \forall\, \sigma \in G_0 \\
&\iff e_\sigma \cdot w = \lambda_\sigma w \quad \forall\, \sigma \in G_0 \text{ für Werte } \lambda_\sigma \in k^* \\
&\iff \sum_M p_M e_\sigma \cdot e_M = \lambda_\sigma \sum_M p_M e_M \quad \forall\, \sigma \in G_0 \\
&\iff \sum_M p_M s_\sigma(M) e_{\sigma M} = \lambda_\sigma \sum_M p_{\sigma M} e_{\sigma M} \quad \forall\, \sigma \in G_0 \\
&\iff p_M s_\sigma(M) = \lambda_\sigma p_{\sigma M} \quad \forall\, \sigma \in G_0, M \in \mathcal{M}_m \ ,
\end{aligned}$$

also

$$\overline{k}^*w \in L_{A,\mu} \iff p_M s_\sigma(M) = \lambda_\sigma p_{\sigma M} \quad \forall\, \sigma \in G_0, M \in \mathcal{M}_m \, . \qquad (**)$$

Diese Relation, die für die Koordinaten der Punkte der Linksidealvarietät $L_{A,\mu}$ gilt, ist für den weiteren Verlauf dieses Teils der Arbeit wesentlich.
Nach Abschnitt 3.3 sind die λ_σ Eigenwerte von $\tilde{\theta}(e_\sigma)$, wobei θ die linksreguläre Darstellung von A bezüglich der Basis $(e_\sigma | \sigma \in G)$ und $\tilde{\theta}$ die durch θ induzierte Darstellung ist.[69]
Die Linksidealvarietät von A läßt sich demnach folgendermaßen beschreiben:

$$L_{A,\mu} = \bigcup_{\Lambda \in L} \mathrm{Z}\left(\left\{ x_M s_\sigma(M) = \lambda_\sigma x_{\sigma M} \;\middle|\; \sigma \in G_0, M \in \mathcal{M}_M \right\}\right),$$

wobei L die Menge aller Tupel $\Lambda = (\lambda_\sigma \mid \sigma \in G_0)$ von Eigenwerten λ_σ zu den Matrizen $\tilde{\theta}(e_\sigma)$ ist. Ist $w = \wedge b$ für ein $b \in \mathrm{St}_{n,m}\,\overline{k}$, so ist nach Proposition 4.16 $\lambda_\sigma = \mathrm{Nred}\, e_\sigma^\mu$ für alle $\sigma \in G_0$. Die in Abschnitt 4.3 definierte reduzierte Linksidealvarietät

$$\tilde{L}_{A,\mu} := \mathbf{P} \bigcap_{\sigma \in G_0} \mathrm{Eig}_{\mathrm{Nred}\, e_\sigma^\mu}\, \tilde{\theta}(e_\sigma)$$

hat wegen $(**)$ die Form

$$\tilde{L}_{A,\mu} = \mathrm{Z}\left(\left\{ x_M \frac{s_\sigma(M)}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma^\mu} = x_{\sigma M} \;\middle|\; \sigma \in G_0, M \in \mathcal{M}_m \right\}\right), \qquad (***)$$

und es gilt für die Brauer-Severi-Varietät $V_{A,\mu}$ von A

$$V_{A,\mu} = V_k(n,m) \cap \tilde{L}_{A,\mu}.$$

[69] Siehe Bemerkung 2.5.

Die bei der Beschreibung von $\tilde{L}_{A,\mu}$ auftretenden Faktoren

$$D_\sigma(M) := \frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e_\sigma^\mu} \quad \text{mit } \sigma \in G, M \in \mathcal{M}_m$$

sind „verschränkt verträglich“ mit der Gruppenstruktur von G:

Lemma 5.10. *Es gilt*

$$D_\sigma(\tau M)\, D_\tau(M) \;=\; D_{\sigma\tau}(M)$$

für alle $\sigma, \tau \in G$ und $M \in \mathcal{M}_m$.

Beweis.[70] Da $|M| = \mu d$, gilt

$$\begin{array}{l} e_\sigma e_\tau \cdot e_M = s_\sigma(\tau M) s_\tau(M) e_{\sigma\tau M} \\ \quad \| \\ s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau} \cdot e_M = s_{\sigma,\tau}^{\mu d}\big(e_{\sigma\tau} \cdot e_M\big) = s_{\sigma,\tau}^{\mu d} s_{\sigma\tau}(M) e_{\sigma\tau M} \ . \end{array}$$

Es folgt die Gleichheit

$$s_\sigma(\tau M) s_\tau(M) = s_{\sigma,\tau}^{\mu d} s_{\sigma\tau}(M)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{s_\sigma(\tau M)}{\operatorname{Nred} e_\sigma^\mu}\ \frac{s_\tau(M)}{\operatorname{Nred} e_\tau^\mu} &= \frac{s_{\sigma,\tau}^{\mu d} s_{\sigma\tau}(M)}{(\operatorname{Nred} e_\sigma e_\tau)^\mu} = \frac{s_{\sigma,\tau}^{\mu d} s_{\sigma\tau}(M)}{(\operatorname{Nred} s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau})^\mu} = \frac{s_{\sigma,\tau}^{\mu d} s_{\sigma\tau}(M)}{s_{\sigma,\tau}^{\mu d} \operatorname{Nred} e_{\sigma\tau}^\mu} \\ &= \frac{s_{\sigma\tau}(M)}{\operatorname{Nred} e_{\sigma\tau}^\mu} \ . \end{aligned}$$

□

Insbesondere erhält man für Punkte der reduzierten Linksidealvarietät eine Relation, die später als Ersetzungsrelation interpretiert werden wird:

Proposition 5.11. *Für $x \in \tilde{L}_{A,\mu}$, $M \in \mathcal{M}_m$ und alle $\sigma \in G$ gilt*

$$x_{\sigma M} = \frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e_\sigma^\mu} x_M \ .$$

[70]Diese Aussage folgt auch aus der Überlegung, daß G_0 auch als G gewählt werden kann, und aus $(***)$; allerdings müßten dann Existenzbedingungen für Punkte aus $\tilde{L}_{A,\mu}$ hinzugenommen werden. Dieser Beweis ist direkt.

Diese Beschreibung der reduzierten Linksidealvarietät zeigt zwei Tatsachen: Für einen Punkt aus $\tilde{L}_{A,\mu}$ sind alle Koordinaten mit derselben Bahn[71] Vielfache voneinander, nämlich

$$M' = \sigma M \implies x_{M'} = D_\sigma(M)\, x_M \ .$$

Zudem kann es passieren, daß alle Koordinaten einer Bahn $B(M)$ stets gleich Null sind, und zwar dann, wenn es zwei Gruppenelemente $\sigma, \tau \in G$ gibt mit $\sigma M = \tau M$ und $s_\sigma(M) \operatorname{Nred} e^\mu_\tau \neq s_\tau(M) \operatorname{Nred} e^\mu_\sigma$, denn dann muß die Koordinate x_M die Gleichung

$$\frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} x_M = \frac{s_\tau(M)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\tau} x_M \iff x_M \left(\frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} - \frac{s_\tau(M)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\tau} \right) = 0$$

erfüllen. Also ist stets $x_M = 0$.
Es konnte bisher kein Beispiel gefunden werden, bei dem dies tatsächlich eintritt. Auch gilt dies etwa für Symbolalgebren nicht. Aber ein allgemeiner Beweis einer Gleichheit dieser Faktoren ist bisher auch nicht gefunden worden. Man kann sich behelfen, indem man eine Invariante Ξ einführt, die Aufschluß über dieses Verhalten gibt, und eine einfachere Beschreibung der reduzierten Linksidealvarietät zuläßt.
Sei ab hier $\exp G | d$ erfüllt. Nach Lemma 5.9 gibt es dann für jedes $\sigma \in G$ ein $M_\sigma \in \mathcal{M}$ mit $\sigma M_\sigma = M_\sigma$. Aus Proposition 5.7 folgt insbesondere

$$s_\sigma(M_\sigma)^{\operatorname{ord} \sigma} = \operatorname{Nred} e_\sigma^{\mu \operatorname{ord} \sigma}.$$

Da $\operatorname{ord} \sigma | d$, läßt sich folgende Abbildung definieren

$$\Xi : G \longrightarrow \mu_d := \left\{ z \in \overline{k} \mid z^d = 1 \right\}; \sigma \longmapsto \Xi_\sigma$$

durch

$$\Xi_\sigma := \frac{s_\sigma(M_\sigma)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma}.$$

Wegen Lemma 5.8 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der M_σ.

Definition. Eine Bahn $B(M_0)$ heißt *Nullbahn* von $\tilde{L}_{A,\mu}$, falls

$$w \in \tilde{L}_{A,\mu}, M \in B(M_0) \implies p_M = 0.$$

$\tilde{L}_{A,\mu}$ heißt *nullbahnenfrei* , falls $\tilde{L}_{A,\mu}$ keine Nullbahnen hat.

[71] Diese verkürzende Sprechweise meint „Koordinaten x_M mit Indizes M in derselben Bahn“. Entsprechend sind im folgenden ähnliche Bezeichnungen gemeint.

Proposition 5.12. *Sei $M_0 \in \mathcal{M}$. Dann sind äquivalent*

i) *$B(M_0)$ ist keine Nullbahn.*

ii) *$\Xi_\sigma = 1$ für alle $\sigma \in G$ mit $\sigma M_0 = M_0$.*

iii) *Sei $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen des Stabilisators G_{M_0} von M_0 in G. Folgende Mengen sind gleich:*

$$L_1 := Z\left(\left\{\begin{array}{rl} x_M \frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} = x_{\sigma M} & \Big| \; M \in B(M_0), \sigma \in G \\ x_M = 0 & \Big| \; M \notin B(M_0) \end{array}\right\}\right) \subseteq \tilde{L}_{A,\mu} \ ,$$
$$L_2 := Z\left(\left\{\begin{array}{rl} x_{M_0} \frac{s_\sigma(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} = x_{\sigma M_0} & \Big| \; \sigma \in \mathcal{R} \\ x_M = 0 & \Big| \; M \notin B(M_0) \end{array}\right\}\right) \ .$$

Insbesondere ist L_2 unabhängig von der Wahl eines bestimmten Repräsentantensystems $\mathcal{R}$.

Beweis. „i) $\Longrightarrow$ ii)“: Sei $\sigma \in G_0$ mit $\sigma M_0 = M_0$ und $\Xi_\sigma \neq 1$. Sei $p \in \tilde{L}_{A,\mu}$. Dann ist

$$p_{M_0} \Xi_\sigma = p_{M_0},$$

d. h. $p_{M_0} = 0$ und $B(M_0)$ ist eine Nullbahn.
„ii) $\Longrightarrow$ iii) “: Zu zeigen ist, daß für $\sigma, \tau \in G$ mit $\sigma G_{M_0} = \tau G_{M_0}$ auch

$$\frac{s_\sigma(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} = \frac{s_\tau(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\tau}$$

gilt. Dann enthält die obere Menge nicht mehr Gleichungen als die untere, und es ist $L_1 = L_2$. Die Definition der unteren Menge ist dann auch unabhängig von der Wahl eines bestimmten $\mathcal{R}$.
Seien $\sigma, \tau \in G$ mit $\sigma G_{M_0} = \tau G_{M_0}$, d. h. $\sigma M_0 = \tau M_0$. Dann ist $\sigma^{-1}\tau M_0 = M_0$, also

$$\frac{s_{\sigma^{-1}\tau}(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_{\sigma^{-1}\tau}} = \Xi_{\sigma^{-1}\tau}.$$

Nach Voraussetzung ist $\Xi_{\sigma^{-1}\tau} = 1$. Aus Lemma 5.10 folgt

$$\frac{s_{\sigma^{-1}}(\tau M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_{\sigma^{-1}}} \frac{s_\tau(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\tau} = \frac{s_{\sigma^{-1}\tau}(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_{\sigma^{-1}\tau}} = 1.$$

Multiplikation mit dem Term $\frac{s_\sigma(\sigma^{-1}\tau M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma}$ liefert die Behauptung

$$\frac{s_\tau(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\tau} \underbrace{\frac{s_{\sigma^{-1}}(\tau M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_{\sigma^{-1}}} \frac{s_\sigma(\sigma^{-1}\tau M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma}}_{= \frac{s_{\sigma^{-1}\sigma}(\tau M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_{1_G}} = 1} = \frac{s_\sigma(\overbrace{\sigma^{-1}\tau M_0}^{=M_0})}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} = \frac{s_\sigma(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} .$$

„iii) $\Longrightarrow$ i) “: Sei p definiert durch $p_{M_0} := 1$, $p_M := \frac{s_\sigma(M_0)}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} p_{M_0}$ mit $M = \sigma M_0$ und $P_M = 0$ für alle $M \notin B(M_0)$. Dann ist $p \in L_2$, und nach Voraussetzung ist auch $p \in L_1 \subseteq \tilde{L}_{A,\mu}$. □

Durch die Operation von G auf $\mathcal{M}_m$ zerfällt $\mathcal{M}_m$ in disjunkte Bahnen, und man hat die Zerlegung

$$\mathcal{M}_m = \dot{\bigcup_{M \in \mathcal{R}}} B(M), \quad \Pi : \mathcal{M}_m \longrightarrow \mathcal{R},$$

mit dem Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ und der Abbildung Π. Definiere für alle $M \in \mathcal{M}$ die Faktoren

$$D(M) := \begin{cases} 0 & \text{falls } B(M) \text{ Nullbahn ,} \\ \frac{s_\sigma(\Pi(M))}{\operatorname{Nred} e^\mu_\sigma} & \text{sonst, wobei } \sigma \in G \text{ mit } M = \sigma\Pi(M) \text{ .} \end{cases}$$

Mit dieser Definition und Proposition 5.12 folgt

Satz 5.13.

$$\tilde{L}_{A,\mu} = Z\Big(\big\{x_M = D(M) x_{\Pi(M)} \bigm| M \in \mathcal{M}\big\}\Big).$$

Dieser Satz ermöglicht nun eine vereinfachte Beschreibung von Brauer-Severi-Varietäten

$$V_{A,\mu} = V_k(n,m) \cap \tilde{L}_{A,\mu}$$

analog der Bildung von Kegelschnitten: Betrachtet man den Schnitt des Kegels $Z\{x^2+y^2=z^2\} \subseteq \mathbf{A}^3$ mit der durch $2y = z$ gegebenen Ebene, so läßt sich die Ebenengleichung als Ersetzungsrelation interpretieren, über die man durch Einsetzen in die Kegelgleichung die reduzierte Gleichung $x^2 - 3y^2 = 0$ erhält. Diese definiert nun im $\mathbf{A}^2$ ein zum Schnitt isomorphes Gebilde, denn die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Z\left\{x^2+y^2=z^2, 2y=z\right\} & \longrightarrow & Z\left\{x^2-3y^2\right\} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y) \\ (x,y,2y) & \longleftarrow\!\shortmid & (x,y) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus. Entsprechend können reduzierte Plücker-Relationen definiert werden, die ein zur Brauer-Severi-Varietät isomorphes Gebilde definieren. Zunächst können unter Umständen Koordinaten ganz außer acht gelassen werden, nämlich die mit Nullbahnen, d. h. für die $D(M) = 0$ ist. Für alle anderen können die definierenden Gleichungen der reduzierten Linksidealvarietät als Ersetzungsrelationen

$$x_M = D(M)x_{\Pi(M)}$$

interpretiert werden.

Definition. Für die Brauer-Severi-Varietät

$$V_{A,\mu} = V_k(n,m) \cap \tilde{L}_{A,\mu}$$

sei $\mathcal{P}$ die Menge der *reduzierten Plücker-Relationen*, die aus allen Gleichungen besteht, die aus den Plücker-Relationen hervorgehen, wenn man alle Koordinaten mit Nullbahnen gleich Null setzt und alle anderen nach der Formel

$$x_M = D(M)x_{\Pi(M)}$$

ersetzt.

Die Elemente von $\mathcal{P}$ sind Gleichungen in den Variablen x_M mit $M \in \mathcal{R}'$, wobei $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ das reduzierte Repräsentantensystem ist, bei dem die Vertreter der Nullbahnen fehlen. Die durch diese Gleichungen definierte Varietät V' liegt im projektiven Raum

$$\mathbf{P} \bigoplus_{M \in \mathcal{R}'} ke_M \; .$$

Satz 5.14. *Der Morphismus*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{red}: & V_{A,\mu} & \longrightarrow & \tilde{V}_{A,\mu} \\ & \overline{k}^* \sum\limits_{M \in \mathcal{M}} p_M e_M & \longmapsto & \overline{k}^* \sum\limits_{M \in \mathcal{R}'} p_M e_M \end{array}$$

ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_{A,\mu} & \longrightarrow & V_{A,\mu} \\ \overline{k}^* \sum\limits_{M \in \mathcal{R}'} p_M e_M & \longmapsto & \overline{k}^* \sum\limits_{M \in \mathcal{M}} D(M) p_{\Pi(M)} e_M \end{array} ,$$

wobei $p_{\Pi(M)} = 0$ *für Nullbahnen, also für* $\Pi(M) \notin \mathcal{R}'$*, angenommen werden soll.*

Bei dem Übergang von $V_{A,\mu}$ zu $\tilde{V}_{A,\mu}$ reduziert sich sowohl die Anzahl der Koordinaten als auch die Anzahl der definierenden Gleichungen. So ist z. B. die Brauer-Severi-Varietät $V_{A,1}$ einer Symbolalgebra vom Grad 3 im $\mathbf{P}^{83}$ ($\binom{9}{3} = 84$ Koordinaten) durch

$$2\binom{9}{3}^2 + \binom{9}{2}\binom{9}{4} = 14112+4536 = 18648$$

Gleichungen definiert,[72] das Bild unter r liegt im $\mathbf{P}^{11}$ ($\mathcal{M}_{3,9}$ zerfällt hier in 12 Bahnen) und wird durch 138 Gleichungen definiert (siehe Abschnitt 6.4). Die hier auch wichtig werdende Bahnstruktur wird im Anhang B untersucht.

5.4 Anmerkungen

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind für sich nicht schwer zu erhalten, sie sind aber grundlegend für die weiteren Betrachtungen. Sie basieren auf der einfachen Gestalt der induzierten Linksoperation im Fall einer verschränkten Gruppenalgebra:

$$e_\sigma \cdot e_M = s_\sigma(M)\, e_{\sigma M} \ .$$

Daraus leitet sich direkt eine Relation unter den Koordinaten eines Punktes $x \in \tilde{L}_{A,\mu}$ ab, nämlich

$$x_{\sigma M} = \frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e_\sigma^\mu}\, x_M \ .$$

Allerdings gibt es in diesem Zusammenhang offene Fragen. Zunächst:

Frage 1. Gilt stets

$$\sigma M = M \quad \Longrightarrow \quad \frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e_\sigma^\mu} \ = \ 1$$

oder gibt es ein Gegenbeispiel, d. h. eine zentraleinfache Gruppenalgebra, die nicht nullbahnenfrei ist?

Bei der Untersuchung des Problems erweisen sich die $M \in \mathcal{M}_m$ mit $\sigma M = M$ als wichtig, d. h. es entsteht die Frage, ob es für jedes $\sigma \in G$ immer

[72] Auch hier gilt wieder, daß diese Zahlen nur die kombinatorischen Möglichkeiten widerspiegeln und viele Gleichungen wegfallen können. Es soll nur ein grober Größenvergleich sein. Siehe zur Anzahl der Plücker-Relationen auch Abschnitt 2.3.

ein $M \in \mathcal{M}_m$ gibt mit $\sigma M = M$. Die Existenz solcher Elemente folgt aus der Eigenschaft, daß der Exponent der Gruppe G der verschränkten Gruppenalgebra $A = (G, s)_k$ den Grad von A teilt. Gezeigt wurde, daß der Exponent stets kleiner oder gleich dem Grad sein muß. Doch offen bleibt

Frage 2. Sei $A = (G, s)_k$ eine verschränkte Gruppenalgebra. Gilt

$$A \text{ zentraleinfach} \quad \Longrightarrow \quad \exp G \,\Big|\, \deg A\ ?$$

Kapitel 6

Linksidealvarietäten von Symbolalgebren

6.1 Verschränkte Produkte und zyklische Algebren

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden Symbolalgebren definiert und ihre wichtigsten Eigenschaften aufgeführt. Dabei werden allgemein bekannte Tatsachen nur erwähnt.
Wichtig werden später Normrelationen,[73] d. h. Beziehungen zwischen Werten, die als Gleichungen der Form $N_{K/k}(y_1 + \theta y_2 + \ldots + \theta^{d-1} y_d) = y_0$ für bestimmte Körpererweiterungen K/k gedeutet werden können.[74] Für Symbolalgebren gilt nun ein Normkriterium für den Zerfall, das in engem Zusammenhang mit diesen Relationen steht. Um den Zusammenhang besser einschätzen zu können, ist die Herleitung des Normkriteriums ausführlich dargestellt. Die gesamte Darstellung ist Kersten [25] entnommen, insbesondere Kap. 13, 16 und 17.
Sei A eine zentraleinfache k-Algebra vom Grad d. A heißt *verschränktes Produkt*, falls A einen Teilkörper[75] $K \subseteq A$ enthält, der galoissch ist mit Dimension $\dim_k K = d$. K ist ein maximaler kommutativer Teilkörper von A und deshalb auch ein Zerfällungskörper von A. Jede zentraleinfache Algebra ist ähnlich zu einem verschränkten Produkt, d. h. jede Klasse der Brauergruppe enthält ein verschränktes Produkt (siehe Kersten [25], Kap. 13, Satz

[73] Zur Definition des Begriffs Normrelation siehe Seite 147.

[74] Später werden Normrelationen, die von étalen k-Algebren $E \subseteq A$ kommen, betrachtet. Schon in diesem Kapitel treten sie in Spezialfällen auf, nämlich als zyklische étale Algebren $K_{a,d}$ (siehe Seite 97).

[75] Wie sonst auch, so sind hier kommutative Teilkörper gemeint.

13.2). Verschränkte Produkte sind genau die Algebren der Form

$$A = (K, G, f) := \bigoplus_{\sigma \in G} K u_\sigma \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} u_\sigma u_\tau = f_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau} \\ u_\sigma c = \sigma(c) u_\sigma \end{array}$$

für alle $\sigma, \tau \in G$ und $c \in K$. Dabei ist K/k eine galoissche Körpererweiterung mit Galoisgruppe G und f ein 2-Kozykel,[76] d. h. $(f) \in \mathrm{H}^2(G, K^*)$. Siehe dazu Kersten [25], Kap. 13, Sätze 13.3 und 13.4.
Enthält A einen zyklischen Teilkörper K der Dimension $\dim_k K = d$, so heißt *A zyklische Algebra*. Zyklische Algebren sind genau die Algebren der Form

$$A = (K, \sigma, a) := \bigoplus_{i=0}^{d-1} K u^i \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} u^d = a \\ uc = \sigma(c) u \end{array}$$

für alle $c \in K$. Dabei ist $G = \langle \sigma \rangle$ und $a \in k^*$. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Konstruktionen wird für zyklische Körpererweiterungen K/k mit Galoisgruppe $G = \langle \sigma \rangle$ wie folgt hergestellt:

$$(K, G, f) \cong (K, \sigma, a_f) \text{ mit } a_f := \prod_{i=0}^{d-1} f_{\sigma^i, \sigma} \ ,$$

$$(K, \sigma, a) \cong (K, G, f^a) \text{ mit } f^a_{\sigma^i, \sigma^j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i + j < d \\ a & \text{falls } i + j \geq d \end{cases} .$$

Zu Einzelheiten siehe Kersten [25], Kap. 16. Bezeichne für galoissche Körpererweiterungen K/k mit Galoisgruppe G die übliche Körpernorm mit

$$N_{K/k}(x) := \prod_{\sigma \in G} \sigma(x).$$

Damit läßt sich nun folgendes wichtige Zerfallskriterium für zyklische Algebren formulieren:

Satz 6.1. *Für zyklische Algebren $A := (K, \sigma, a)$ gilt*

$$A \text{ zerfällt} \quad \Longleftrightarrow \quad a \in N_{K/k}(K^*).$$

Beweis. Schreibe $(K, \sigma, a) = \bigoplus_i K u^i$ mit $u^d = a$ und $uc = \sigma(c) u$ bzw. $(K, \sigma, 1) = \bigoplus_i K v^i$ mit $v^d = 1$ und $uc = \sigma(c) u$ für $c \in K$.
„ $\Longrightarrow$ ": Sei $\psi : (K, \sigma, a) \longrightarrow (K, \sigma, 1)$ ein k-Algebraisomorphismus. Dann

[76] Mit $\mathrm{H}^2(G, K^*)$ ist die Galoiskohomologiegruppe gemeint, d. h. G operiert durch k-Automorphismen auf K^*.

gibt es nach dem Satz von Skolem-Noether[77] ein invertierbares Element $\tilde{w} \in (K, \sigma, 1)$ mit[78] $c = \tilde{w}\psi(c)\tilde{w}^{-1}$ für alle $c \in K$. Setze $w := \tilde{w}\psi(u)\tilde{w}^{-1}$. Wegen $\tilde{w}^{-1}c\tilde{w} = \psi(c)$ gilt

$$\begin{aligned} wcw^{-1} &= \tilde{w}\psi(u)\underbrace{\tilde{w}^{-1}c\tilde{w}}_{=\psi(c)}\psi(u)^{-1}\tilde{w}^{-1} = \tilde{w}\psi(ucu^{-1})\tilde{w}^{-1} \\ &= \tilde{w}\psi(\sigma(c))\tilde{w}^{-1} = \sigma(c), \end{aligned}$$

also $wc = \sigma(c)w$ für alle $c \in K$. Setze $b := wv^{d-1} = wv^{-1}$. Dann folgt

$$bc = wv^{d-1}c = w\sigma^{d-1}(c)v^{d-1} = \sigma^d(c)wv^{d-1} = cb,$$

d. h.[79] $b \in C_{(K,\sigma,1)}(K)$. Da K aber maximal kommutativer Teilring ist,[80] ist $b \in K$. Nun ist einerseits

$$w^d = \tilde{w}\psi(u)^d\tilde{w}^{-1} = \tilde{w}\psi(u^d)\tilde{w}^{-1} = \tilde{w}\psi(a)\tilde{w}^{-1} = a,$$

andererseits gilt

$$w^d = bvbv \dots bv = b\sigma(b)\sigma^2(b)\dots\sigma^{d-1}(b)v^d = N_{K/k}(b),$$

d. h. $a = N_{K/k}(b)$.
„ $\Longleftarrow$ ": Sei $a = N_{K/k}(b)$. Setze $\tilde{u} := b^{-1}u$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{u}^d &= b^{-1}ub^{-1}u\dots b^{-1}u = b^{-1}\sigma(b^{-1})\sigma^2(b^{-1})\dots\sigma^{d-1}(b^{-1})u^d \\ &= N_{K/k}(b^{-1})u^d = a^{-1}a = 1. \end{aligned}$$

Wegen

$$\tilde{u}c = b^{-1}uc = b^{-1}\sigma(c)u = \sigma(c)\tilde{u}$$

wird durch $u \longmapsto \tilde{u} \longmapsto v$ ein k-Algebraisomorphismus $(K, \sigma, a) \cong (K, \sigma, 1)$ induziert. □

[77] Eine Form des Satzes von Skolem-Noether besagt folgendes: Sind A und B zwei zentraleinfache k-Algebren und $f, g : A \longrightarrow B$ zwei k-Algebrahomomorphismen, so gibt es ein invertierbares Element $w \in B$, so daß $g(\alpha) = wf(\alpha)w^{-1}$ für alle $\alpha \in A$ gilt. Vgl. Kersten [25], Satz 8.2, oder Pierce [33], chap. 12.6.

[78] Fasse hier Elemente $c \in K$ als Elemente $c1_{(K,\sigma,a)}$ aus (K, σ, a) bzw. $c1_{(K,\sigma,1)}$ aus $(K, \sigma, 1)$ auf.

[79] Ist A ein Ring, $B \leq A$ ein Teilring und $M \subseteq A$ eine Teilmenge, so ist $C_B(M)$ der Zentralisator von M in B. Der hier benötigt Satz lautet: Es gilt $C_A(B) = B$ genau dann, wenn B ein maximaler kommutativer Teilring von A ist (Siehe Draxl [13], p. 40, (11)).

[80] Siehe die Bemerkung oben, nach der Definition von verschränkten Produkten.

Bemerkung 6.2 (Darstellung als verschränkte Gruppenalgebren). Es ist eine wichtige Frage, wann sich ein verschränktes Produkt als verschränkte Gruppenalgebra schreiben läßt. Die Antwort hängt unter anderem davon ab, welche Basis von K gewählt wird. Es soll kurz ein Beispiel betrachtet werden.

Sei K/k eine Galoiserweiterung vom Grad d mit Galoisgruppe G, $(f) \in \mathrm{H}^2(G, K^*)$ eine Kozykelklasse und A das verschränkte Produkt

$$A := (K, G, f) := \bigoplus_{\sigma \in G} K u_\sigma \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} u_\sigma u_\tau = f_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau} \\ u_\sigma c = \sigma(c) u_\sigma \end{array}$$

für alle $\sigma, \tau \in G$ und $c \in K$.

Sei $K = k(\vartheta)$ mit einem primitiven Element ϑ. Dann ist

$$\big(\vartheta^i u_\sigma \mid i = 0, \ldots, d-1 \text{ und } \sigma \in G\big)$$

eine k-Basis von A und das Produkt zweier Basiselemente ist

$$(\vartheta^i u_\sigma)(\vartheta^j u_\tau) = \vartheta^i \sigma(\vartheta)^j f_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}.$$

Seien alle Werte von f in $\overline{k}$ und enthalte k eine primitive d-te Einheitswurzel ξ. Sei K/k zyklisch mit $G = \langle \sigma \rangle$. Dann gibt es ein $\vartheta \in K$ mit $K = k(\vartheta)$, $\sigma(\vartheta) = \xi \vartheta$ und $\vartheta^d = a \in k^*$. Sind alle Werte von f in k^*, so läßt sich A als verschränktes Produkt der Gruppe $H := \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$ schreiben, denn das Produkt zweier Basiselemente ist:

$$\begin{aligned}(\vartheta^i u_{\sigma^m})(\vartheta^j u_{\sigma^n}) =& \vartheta^i \sigma^m(\vartheta)^j f_{\sigma^m,\sigma^n} u_{\sigma^{m+n}} \\ =& \xi^{mj} f_{\sigma^m,\sigma^n} \vartheta^{i+j} u_{\sigma^{m+n}} \ .\end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\begin{array}{rccl} s: & H \times H & \longrightarrow & k^* \\ & \big((i,m),(j,n)\big) & \longmapsto & \xi^{mj} f_{\sigma^m,\sigma^n} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } i+j < d \\ a & \text{falls } i+j \geq d \end{array} \right. \end{array}$$

ein 2-Kozykel mit Werten in k^*, und es ist

$$A \cong (G, s)_k \ .$$

Dieses Vorgehen läßt sich leicht auf etwas allgemeinere abelsche Kummererweiterungen übertragen, so etwa auf den Fall einer bizyklischen Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe $G \cong \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$.

6.2 Symbolalgebren

Sei $d \in \mathbb{N}$, ξ eine primitive d-te Einheitswurzel, die im Grundkörper k enthalten ist, und seien $a, b \in k^*$ Skalare. Die k-Algebra

$$\begin{aligned} A := \left(\frac{a, b}{k, \xi}\right) &:= \left\langle x, y \mid x^d = a,\ y^d = b,\ yx = \xi xy \right\rangle_k \\ &= \bigoplus_{i,j=0}^{d-1} kx^i y^j \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} x^d = a, y^d = b \\ yx = \xi xy \end{array} \end{aligned}$$

heißt *Symbolalgebra* vom Grad d oder auch *Normrestalgebra* (zur d-ten Potenz). Sie ist zentraleinfach und endlichdimensional (siehe Kersten [25], Satz 17.4 (i)). Symbolalgebren sind eng verwandt mit zyklischen Algebren. Ist z. B. $d = p$ eine Primzahl und b keine p-te Potenz in k, so gilt

$$\left(\frac{a, b}{k, \xi}\right) \cong (k(\sqrt[p]{b}), \sigma, a),$$

wobei $k(\sqrt[p]{b})/k$ eine zyklische Körpererweiterung vom Grad p ist, deren Galoisgruppe von $\sigma : \sqrt[p]{b} \longmapsto \xi \sqrt[p]{b}$ erzeugt wird. Dieser Zusammenhang, der auch obiges Normkriterium betrifft, wird nun dargestellt.

Betrachte für $a \in k^*$ die kommutative k-Algebra

$$K_{a,d} := k[t]/(t^d - a)$$

mit einer Unbestimmten t. Sei u die Restklasse $t \mod (t^d - a)$. Dann ist $1, u, u^2, \ldots, u^{d-1}$ eine Basis von $K_{a,d}$ als k-Vektorraum. Durch

$$\sigma : u \longmapsto \xi u$$

wird ein k-Algebraautomorphismus von $K_{a,d}$ der Ordnung d definiert (siehe Kersten [25], Lemma 17.1). Definiere für $K_{a,d}$ eine Norm

$$N_{K_{a,d}/k}(x) = \prod_{i=0}^{d-1} \sigma^i(x).$$

Es sind äquivalent

i) $K_{a,d}$ ist ein Körper.

ii) Das Polynom $t^d - a$ ist irreduzibel über k.

iii) Falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $m|d$ und $a = c^m$ für ein $c \in k$, so ist $m = 1$.

Ist $K_{a,d}$ ein Körper, so ist die Körpererweiterung $K_{a,d}/k$ galoissch mit zyklischer Galoisgruppe $G = \langle\sigma\rangle$, wobei σ der oben definierte Automorphismus ist.
Sei nun $m \in \mathbb{N}$ der größte Teiler von d, so daß es ein $c \in k$ gibt mit $a = c^m$ und $\nu \in \mathbb{N}$ mit $d = \nu m$. Dann ist $t^\nu - c$ irreduzibel über k und demnach $K_{c,\nu}$ ein Körper. Definiere

$$y := c^{-1}u^\nu \quad \text{und} \quad e := m^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} y^i.$$

Der Wert $e \in K_{a,d}$ ist definiert, da wegen $\xi \in k$ die Charakteristik $\operatorname{char} k$ kein Teiler von d ist und deshalb $d \in k^*$ gilt.[81] Diese Werte haben folgende Eigenschaften

$$(1) \qquad ey = ye = e \quad \text{und} \quad e^2 = e,$$

$$(2) \qquad \sigma^i(e) = e \iff m|i,$$

$$(3) \qquad e\sigma^i(e) = \begin{cases} e & \text{falls } m|i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

denn:

$$(1)\ ey = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} y^i = m^{-1}\left(\underbrace{y^m}_{=1} + \sum_{i=1}^{m-1} y^i\right) = m^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} y^i = e \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} e^2 &= m^{-2}\sum_{i=0}^{2m-2}\sum_{j=0}^{\min(i,2m-2-i)} y^i = m^{-2}\sum_{i=0}^{2m-2}\big(\min(i,2m-2-i)+1\big)y^i \\ &= m^{-2}\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)y^i + m^{-2}y^m\sum_{i=0}^{m-2}(m-1-i)y^i \\ &= m^{-2}\left(\sum_{i=0}^{m-2} my^i + my^{m-1}\right) = m^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} y^i = e, \end{aligned}$$

$$(2)\ \sigma^i(e) = \sigma^i\left(m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1} y^j\right) = m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sigma^i(y)^j$$

$$= m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\xi^{\nu ij}y^j\ , \quad \text{da } \sigma(y) = \xi^\nu y\ .$$

[81] Das kann man z. B. so einsehen: Sei $\mathbb{F}_p$ der Primkörper von k mit $p \geq 2$. Ist $\xi \in k$ eine primitive d-te Einheitswurzel, so läßt sich auch der Zwischenkörper $K := \mathbb{F}_p(\xi) = \mathbb{F}_{p^r}$ bilden mit einem $r \geq 1$. Die Einheitengruppe K^* hat die Ordnung $p^r - 1$. ξ erzeugt eine Untergruppe von K^* der Ordnung d. Wäre p ein Teiler von d, so würde p auch $p^r - 1$ teilen, ein Widerspruch.

Gilt nun $m|i$, so ist $\xi^{\nu ij} = 1$ und $\sigma^i(e) = e$. Ist umgekehrt $\sigma^i(e) = e$, so folgt durch Koeffizientenvergleich, daß $\xi^{\nu ij} = 1$, also $m|i$ gelten muß, da $1, y, y^2, \ldots, y^{m-1}$ linear unabhängig über k sind.

(3) Ist m Teiler von i, so folgt aus (2), daß $e\sigma^i(e) = e^2 = e$ gilt. Ist m kein Teiler von i, so ist auch $\xi^{\nu i} \neq 1$ und es gilt

$$\begin{aligned} e\sigma^i(e) &= m^{-2}\left(\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{l}\xi^{\nu ij}y^l + y^m\sum_{l=0}^{m-2}\sum_{j=l+1}^{m-1}\xi^{\nu ij}y^l\right) \\ &= m^{-2}\left(\sum_{l=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-1}\xi^{\nu ij}y^l + \sum_{j=0}^{m-1}\xi^{\nu ij}y^l\right) = 0\ , \end{aligned}$$

da $\sum_{j=0}^{m-1}\xi^{\nu ij} = \frac{1-\xi^{\nu im}}{1-\xi^{\nu i}} = \frac{1-\xi^{di}}{1-\xi^{\nu i}} = 0$, falls $\xi^{\nu i} \neq 1$.

Lemma 6.3. *Es ist $K_{a,d}e$ ein galoisscher Erweiterungskörper von $ke \cong k$ mit zyklischer Galoisgruppe $H = \langle\sigma^m\rangle$ der Ordnung ν. Außerdem gilt*

$$K_{a,d}e \ \cong\ K_{c,\nu}\ ,$$

und $(1, w, w^2, \ldots, w^{\nu-1})$ mit $w := ue$ ist eine k-Basis von $K_{a,d}e$.

Beweis. Die Zuordnung $t \mod (t^\nu - c) \longmapsto w = ue$ induziert einen k-Algebrahomomorphismus

$$\phi : K_{c,\nu} \longrightarrow K_{a,d}e,$$

da $(ue)^\nu = u^n e^n = cye = ce$. Da $K_{c,\nu}$ ein Körper ist, ist ϕ injektiv und ϕ ist surjektiv, weil $K_{a,d}e$ von $w = ue$ erzeugt wird. Als Bild einer k-Basis von $K_{c,\nu}$ ist dann $1, w, w^2, \ldots, w^{\nu-1}$ eine k-Basis von $K_{a,d}e$. Wegen

$$\sigma^m(w) = \sigma^m(u)e = \xi^m ue = \xi^m w$$

ist σ^m ein k-Algebraautomorphismus der Ordnung ν von $K_{a,d}e$. Wegen

$$\sigma^m(w^i) = \sigma^m(u^i)e = \xi^{im}w^i$$

gilt $(K_{a,d}e)^H = ke$. □

Man hat damit die k-Algebraisomorphien

$$K_{a,d}e \ \cong\ K_{c,\nu} \ \cong\ k(\sqrt[\nu]{c}) \ \cong\ k(\sqrt[d]{a}).$$

Verallgemeinere[82] nun die Konstruktion zyklischer Algebren: Definiere für $a, b \in k^*$

$$(K_{a,d}, \sigma, b) := \bigoplus_{i=0}^{d-1} K_{a,d} v^i \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} v^d = b \\ vc = \sigma(c)v \end{array} .$$

Dabei ist wie oben $K_{a,d} := k[t]/(t^d - a)$ und σ der durch $u \longmapsto \xi u$ induzierte k-Automorphismus, wobei u die Restklasse $t \mod (t^d - a)$ ist. Durch Vergleich der definierenden Relationen sieht man, daß die Zuordnung $u \longmapsto x, v \longmapsto y$ einen Isomorphismus

$$\big(K_{a,d}, \sigma, b\big) \quad \cong \quad (a, b, \xi) := \left(\frac{a, b}{k, \xi}\right)$$

induziert.

Satz 6.4.[83]

i) $e(a, b, \xi)e \cong \big(k(\sqrt[d]{a}), \sigma^m, b\big)$.

ii) $(a, d, \xi) \sim \big(k(\sqrt[d]{a}), \sigma^m, b\big)$.

iii) Es sind äquivalent

1) $(a, b, \xi) \sim k$.

2) $b \in N_{K_{a,d}/k}(K_{a,d})$.

3) $a \in N_{K_{b,d}/k}(K_{b,d})$.

4) $b \in N_{k(\sqrt[d]{a})/k}\big(k(\sqrt[d]{a})\big)$.

5) $a \in N_{k(\sqrt[d]{b})/k}\big(k(\sqrt[d]{b})\big)$.

Beweis. i) Es gilt

$$\begin{aligned} e(a, b, \xi)e \;&\cong\; \bigoplus_{i=0}^{d-1} eK_{a,d} v^i e \;=\; \bigoplus_{i=0}^{d-1} K_{a,d} e \sigma^i(e) v^i \;\overset{(3)}{=}\; \bigoplus_{i=0}^{\nu-1} K_{a,d} e v^{im} \\ &\cong\; \bigoplus_{i=0}^{\nu-1} k(\sqrt[d]{a}) w^i \;\cong\; (k(\sqrt[d]{a}), \sigma^m, b) \end{aligned}$$

[82]Dies ist nur eine Verallgemeinerung des Falls, in dem der Grundkörper eine primitive d-te Einheitswurzel enthält.

[83]Zur Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ bei zentraleinfachen Algebren siehe Seite 59.

mit $w := v^m$. Die letzte Isomorphie gilt wegen

$$\begin{aligned} &w^\nu = v^d = b \quad \text{und} \\ &wu = v^m u = \xi^m u v^m = \xi^m u w = \sigma^m(u) w. \end{aligned}$$

ii) Folgt aus Lemma 6.5.
iii) Die Äquivalenz (1) $\Longleftrightarrow$ (4) folgt aus Satz 6.1 und ii). Die Äquivalenz (4) $\Longleftrightarrow$ (2) folgt mit Lemma 6.6. Die Äquivalenzen (2) $\Longleftrightarrow$ (3) und (4) $\Longleftrightarrow$ (5) ergeben sich aus der Isomorphie $(a, b, \xi) \cong (b, a, \xi^{-1})$. □

Lemma 6.5. *Ist A eine zentraleinfache k-Algebra und $e \in A$ eine Idempotente, d. h. $e^2 = e$, so gilt*

$$eAe \sim A.$$

Beweis. Siehe Kersten [25], Beweis zu Satz 17.4 (vi). □

Lemma 6.6.

$$b \in N_{K_{a,d}/k}(K_{a,d}) \quad \Longleftrightarrow \quad b \in N_{k(\sqrt[d]{a})/k}\big(k(\sqrt[d]{a})\big)\ .$$

Beweis.
„$\Longrightarrow$": Ist $x \in K_{a,d}$ mit $b = N_{K_{a,d}/k}(x)$, so hat man mit $z := \prod_{i=0}^{m-1} \sigma^i(x)$

$$N_{k(\sqrt[d]{a})/k}(z) = N_{K_{a,d}e/k}(z) = \prod_{j=0}^{\nu-1} \sigma^{mj} \left(\prod_{i=0}^{m-1} \sigma^i(x) \right) = \prod_{i=0}^{d-1} \sigma^i(x) = b.$$

„$\Longleftarrow$": Sei $z \in k(\sqrt[d]{a})$ mit

$$b = N_{k(\sqrt[d]{a})/k}(z) = N_{K_{a,d}e/k}(z) = \prod_{i=0}^{\nu-1} \sigma^{im}(z)$$

und $x := ze + \sigma(e) + \sigma^2(e) + \ldots + \sigma^{m-1}(e)$. Dann ist[84]

$$\begin{aligned} N_{K_{a,d}/k}(x) &= \prod_{i=0}^{d-1} \sigma^i(x) = \\ &= \left(ze + \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^j(e)\right)\left(\sigma(ze) + \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^{1+j}(e)\right) \cdots \left(\sigma^{d-1}(ze) + \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^{d-1+j}(e)\right) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}(d)} \prod_{i \in M} \sigma^i(ze) \prod_{i \in -M} \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^{i+j}(e). \end{aligned}$$

[84] Dabei ist $\mathcal{M}(d)$ die Menge der geordneten Tupel mit verschiedenen Werten aus $\{0, \ldots, d-1\}$ und für ein Tupel $M \in \mathcal{M}(d)$ ist $-M := (0, \ldots, d-1) - M$, vgl. die Definition auf Seite 11.

Berechne nun für bestimmte $M \in \mathcal{M}(d)$ die Summanden: Sind $i, j \in M$ nicht kongruent modulo m, d. h. m ist kein Teiler von $j - i$, dann ist der zu M gehörige Summand gleich Null:

$$\sigma^i(ze)\sigma^j(ze) = \sigma^i(z\sigma^{j-i}\underbrace{e\sigma^{j-i}(e)}_{=0 \text{ nach } (3)}) = 0.$$

Alle Werte in M müssen also Vielfache von m sein, damit der Summand nicht verschwindet. Dann ist $|M| \leq \nu$. Falls $|M| < \nu$ ist, so gibt es ein $i_0 \in -M$, so daß $i_0 \equiv i \mod m$ für alle $i \in M$. Dann ist für jedes $i \in M$

$$\sigma^i(ze)\sum_{j=1}^{m-1}\sigma^{i_0+j} = \sigma^i(z)\sum_{j=1}^{m-1}\sigma^i(e\sigma^{i_0+j-i}(e)) = 0.$$

Mit den Tupeln

$$M_r := \big(r, r+m, \ldots, r+(\nu-1)m\big) \in \mathcal{M}_{\nu,d}$$

für $r = 0, \ldots, m-1$ hat man damit

$$\begin{aligned} N_{K_{a,d}/k}(x) &= \sum_{r=0}^{m-1}\prod_{i\in M_r}\sigma^i(z)\underbrace{\sigma^i(e)\prod_{i\in -M_r}\sum_{j=1}^{m-1}\sigma^{i+j}(e)}_{=\sigma^i(e)} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1}\sigma^r\left(\prod_{i=0}^{\nu-1}\sigma^{im}(z)\sigma^{im}(e)\right)\sigma^r(e) \\ &= \sum_{r=0}^{m-1}\sigma^r\left(N_{K_{a,d}e/k}(z)\right)\sigma^r(e) \\ &= b\sum_{r=0}^{m-1}\sigma^r(e) = b, \end{aligned}$$

denn

$$\sum_{r=0}^{m-1}\sigma^r(e) = \sum_{r=0}^{m-1}m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\xi^{\nu rj}y^j = m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}\underbrace{\sum_{r=0}^{m-1}\xi^{\nu rj}}_{\substack{=0 \text{ für } j\neq 0,\\ =m \text{ für } j=0}} y^j = 1.$$

$\square$

6.3 Linksidealvarietäten von Symbolalgebren

Sei $d \in \mathbb{N}$ und ξ eine primitive d-te Einheitswurzel, die im Grundkörper k enthalten ist. Seien $a, b \in k^*$ Skalare und A die Symbolalgebra

$$\begin{aligned} A :=& \left(\frac{a,b}{k,\xi}\right) \\ =& \left\langle x, y \mid x^d = a, y^d = b, yx = \xi xy \right\rangle_k . \end{aligned}$$

Da sich A als $k[x,y] \subseteq A$ schreiben läßt und x und y invertierbar sind, kann die Menge T, die zur Definition von Linksidealvarietäten gebraucht wird, als $T = \{x, y\}$ gewählt werden.

Symbolalgebren als Gruppenalgebren
Beschreibe A als Gruppenalgebra der Gruppe[85] $G := \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$ durch

$$A = \bigoplus_{(i,j)\in G} k e_{(i,j)}$$

mit $e_{(i,j)} := x^{\underline{i}} y^{\underline{j}}$ und

$$e_\sigma e_\tau = s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau},$$

wobei die Faktoren $s_{\sigma,\tau}$ durch

$$s_{(i,j),(h,l)} := \begin{cases} \xi^{\underline{j}\cdot\underline{h}} & \text{falls } \underline{i}+\underline{h} < d \text{ und } \underline{j}+\underline{l} < d, \\ a\xi^{\underline{j}\cdot\underline{h}} & \text{falls } \underline{i}+\underline{h} \geq d \text{ und } \underline{j}+\underline{l} < d, \\ b\xi^{\underline{j}\cdot\underline{h}} & \text{falls } \underline{i}+\underline{h} < d \text{ und } \underline{j}+\underline{l} \geq d, \\ ab\xi^{\underline{j}\cdot\underline{h}} & \text{falls } \underline{i}+\underline{h} \geq d \text{ und } \underline{j}+\underline{l} \geq d \end{cases}$$

definiert sind. Die Abbildung

$$s : (\sigma, \tau) \longmapsto s_{\sigma,\tau}$$

ist ein normierter 2-Kozykel mit Werten in k^*. Dies folgt aus der Assoziativität von A, läßt sich aber auch direkt verifizieren. Es muß die Gültigkeit der Gleichung

$$s_{\sigma,\tau}\ s_{\sigma\tau,\rho} \ = \ s_{\tau,\rho}\ s_{\sigma,\tau\rho}$$

[85] Schreibe die Gruppe G wie bisher multiplikativ, obwohl die natürliche Verknüpfung die Addition modulo d wäre. Bezeichne für ein Gruppenelement $\sigma \in \mathbb{Z}_d$ mit $\underline{\sigma}$ den Repräsentanten von σ aus $\{0, \ldots, d-1\}$ und für eine Zahl $i \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{i}$ die Restklasse $i + d\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_d$.

überprüft werden. Ist $\sigma = (i, j) \in G$, so schreibe i_σ für $\underline{i}$ und j_σ für $\underline{j}$. Wegen $j_{\sigma\tau} \equiv j_\sigma + j_\tau \mod d$ gilt

$$\xi^{j_\sigma i_\tau} \xi^{j_{\sigma\tau} i_\rho} = \xi^{j_\sigma i_\tau} \xi^{j_\sigma i_\rho} \xi^{j_\tau i_\rho} = \xi^{j_\sigma i_{\tau\rho}} \xi^{j_\tau i_\rho},$$

d. h. ξ steht auf beiden Seiten mit gleichem Exponenten. Trete der Faktor a auf der linken Seite mit dem Exponenten ϵ_{li} und auf der rechten mit ϵ_{re} auf. Wegen $i_{\sigma\tau} = i_\sigma + i_\tau$, falls $i_\sigma + i_\tau < d$, gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon_{li} = 0 &\iff i_\sigma + i_\tau < d \ \wedge \ i_{\sigma\tau} + i_\rho < d \\
&\iff i_\sigma + i_\tau < d \ \wedge \ i_\sigma + i_\tau + i_\rho < d \\
&\iff i_\sigma + i_\tau + i_\rho < d \\
&\iff i_\tau + i_\rho < d \ \wedge \ i_\sigma + i_{\tau\rho} < d \\
&\iff \epsilon_{re} = 0.
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise folgt $\epsilon_{li} = 2 \iff \epsilon_{re} = 2$ und somit auch der verbleibende Fall. Analog ergibt sich die Aussage für den Faktor b. s ist also ein 2-Kozykel.
Die Gruppe G hat als Exponenten d, somit ist die Voraussetzung von Lemma 5.9 erfüllt, und es existiert zu jedem $\sigma \in G$ ein $M \in \mathcal{M}_m$ mit $b_\sigma(M) = 1$, d.h. $\sigma M = M$.

Reduzierte Norm
Die reduzierte Norm von Elementen aus A läßt sich über eine Zerfällungsdarstellung bestimmen: Sei $\beta \in \overline{k}$ mit $\beta^d = b$ und $K := k(\beta)$. Dann induziert die Zuordnung

$$e_{(1,0)} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & & & a \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{(0,1)} \longmapsto \beta \begin{pmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & \xi & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \xi^{d-1} \end{pmatrix}$$

eine k-lineare Darstellung $\theta : A \longrightarrow \operatorname{Mat}_d K$ und die reduzierte Norm von A ist

$$\operatorname{Nred}_A : A \longrightarrow k; x \longmapsto \det(\theta(x)),$$

also

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nred} e_{(1,0)} &= (-1)^{d-1} a \quad \text{ und} \\
\operatorname{Nred} e_{(0,1)} &= b \prod_{i=0}^{d-1} \xi^i = b \xi^{\frac{d(d-1)}{2}} = (-1)^{d-1} b\ .
\end{aligned}$$

Für die Elemente der kanonischen Basis von A ergibt sich

$$\operatorname{Nred} e_{(i,j)} = (-1)^{(\underline{i}+\underline{j})(d-1)} a^{\underline{i}} b^{\underline{j}}.$$

Die Invariante Ξ

Sei $\sigma = (i,j) \in G$ mit $h := \operatorname{ord}\sigma$ und $M \in \mathcal{M}_d$ mit $\sigma M = M$. Dann ist wegen Lemma 5.8 i)

$$s_\sigma(M) = \big(s_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big)\big)^\nu$$

für beliebiges $\tau \in G$ und $\nu = \frac{d}{\operatorname{ord}\sigma}$ und

$$s_\sigma\big(B_\sigma(\tau)\big) = (-1)^{h-1} \prod_{r=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^r} \ .$$

Sei $\hat{h}$ die Ordnung von i in $\mathbb{Z}_d$. Wegen

$$\prod_{r=0}^{\hat{h}-1} s_{\sigma,\sigma^r} = \xi^{\underline{ij} \sum\limits_{r=0}^{\hat{h}-1} r} a^{\frac{\underline{i\hat{h}}}{d}} b^* \ ,$$

wobei b^* eine unbestimmte Potenz von b bezeichnet, und

$$\prod_{r=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^r} = \xi^{\underline{ij}S} a^{\frac{\underline{ih}}{d}} b^{\frac{\underline{jh}}{d}} \qquad \text{mit } S := \sum_{r=0}^{h-1} r$$

ist dann

$$s_\sigma(M) = (-1)^{\nu(h-1)} \prod_{r=0}^{h-1} s_{\sigma,\sigma^r}^\nu = (-1)^{\nu(h-1)} \xi^{\nu \underline{ij} S} a^{\underline{i}} b^{\underline{j}}.$$

Wegen

$$\xi^{\nu S} = \xi^{\frac{\nu h(h-1)}{2}} = (-1)^{h-1}$$

folgt

$$s_\sigma(M) = (-1)^{\nu(h-1) + \underline{ij}(h-1)} a^{\underline{i}} b^{\underline{j}} = (-1)^{(\underline{ij}+\nu)(h-1)} a^{\underline{i}} b^{\underline{j}}.$$

Bemerkung 6.7. Es gilt

$$s_\sigma(M) = \operatorname{Nred} e_\sigma$$

für $\sigma \in G$ und $M \in \mathcal{M}_d$ mit $\sigma M = M$.

Beweis. Zu zeigen ist, daß die Vorzeichen

$$\epsilon_1 := (-1)^{(\underline{i}+\underline{j})(d-1)} \quad \text{und } \epsilon_2 := (-1)^{(\underline{i}\underline{j}+\nu)(\mathrm{ord}(\sigma)-1)}$$

gleich sind. Zeige dies durch eine Fallunterscheidung:
„ d ungerade ": Dann ist $\mathrm{ord}(\sigma)$ ungerade, und es ist $\epsilon_1 = 1 = \epsilon_2$.
„ d gerade ": Ist ν gerade, so sind $\underline{i}$ und $\underline{j}$ gerade, da ν ein Teiler von beiden Zahlen ist, und es ist $\epsilon_1 = 1 = \epsilon_2$.
Ist ν ungerade, und sind $\underline{i}$ und $\underline{j}$ beide ungerade, so ist $\epsilon_1 = 1 = \epsilon_2$.
Ist ν ungerade und $\underline{i}+\underline{j} \equiv 1 \mod 2$, so ist $\mathrm{ord}(\sigma)$ gerade (denn d ist gerade) und es ist $\epsilon_1 = -1 = \epsilon_2$. □

Mit Proposition 5.12 folgt

Proposition 6.8. *Reduzierte Linksidealvarietäten von Symbolalgebren sind nullbahnenfrei und lassen sich beschreiben als*

$$\tilde{L}_{A,\mu} = Z\Big(\big\{x_M = D(M)x_{\Pi(M)} \;\big|\; M \in \mathcal{M}\big\}\Big)$$

mit Faktoren

$$D(M) := \frac{s_\sigma(\Pi(M))}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma^\mu},$$

wobei $\sigma \in G$ mit $M = \sigma\Pi(M)$.

Bahnstruktur von Symbolalgebren
Nun ist es wichtig, einen Überblick über die Bahnen, die durch die Operation von G auf $\mathcal{M}_{d,G}$ entstehen, zu gewinnen. Ein erster, anschaulich motivierter Ansatz liefert folgendes:
Bezeichne die Elemente $M \in \mathcal{M}_{d,G}$ als Indizes. Identifiziere die Grundmenge $G = \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$ von $\mathcal{M}_{d,G}$ mit den Kreuzungspunkten einer $d \times d$-Tabelle

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & \dots & \text{d-1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \text{d-1} & & & \end{array} .$$

Ein Index ist dann eine Auswahl von d Punkten. Die Operation von G läßt sich deuten als Verschiebung solch einer Menge von Punkten, zwei Punktmengen gehören derselben Bahn an, wenn sie sich durch Verschieben in Deckung bringen lassen. Als Bahnlängen kommen nur Teiler von d^2 in Frage. Andererseits müssen sie Vielfache von d sein, denn der Stabilisator eines Index kann höchstens die Ordnung d haben.

Sei $d = p$ eine Primzahl. Dann kommen als Bahnlängen nur p und p^2 in Frage. Welche $M \in \mathcal{M}$ haben die Bahnlänge p ? Es kann o. E. $(0,0) \in M$ angenommen werden, denn jede Bahn enthält solch ein Element. Dann ist M durch Hinzunahme eines weiteren Elements eindeutig bestimmt, da der Stabilisator p Elemente enthalten muß und somit alle Vielfachen dieses weiteren Elements im Index enthalten sein müssen. Es gibt außer $(0,0)$ noch $p^2 - 1$ Elemente in $\mathcal{M}$, wovon jeweils $p-1$ den gleichen Index erzeugen. Es gibt also $p+1$ Bahnen der Länge p. Man kann die Bahnen mit $|B(M)| = p$ mit den Ursprungsgeraden in $\mathbb{F}_p^2$ identifizieren und erhält dann folgende Repräsentanten für Bahnen mit Länge p:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & \dots & \text{p-1} \\
\hline
0 & \bullet & \dots & \bullet \\
\vdots & & & \\
\text{p-1} & & &
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & \dots & \text{p-1} \\
\hline
0 & \bullet & & \\
\vdots & \vdots & & \\
\text{p-1} & \bullet & &
\end{array}
\quad ,
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & & \dots & \text{p-1} \\
\hline
0 & \bullet & & & \\
 & . & \bullet & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
\text{p-1} & & & & \bullet
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & \dots & & \text{p-1} \\
\hline
0 & \bullet & & & \\
 & . \; . & \bullet & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
 & & \ddots & & \\
\text{p-1} & & & & \bullet
\end{array}
\quad , \text{ usw.}
$$

Bezeichnet man mit η_m die Anzahl der Bahnen der Länge m, so kann man über die Zerlegung

$$\binom{p^2}{p} = p^2 \eta_{p^2} + p(p+1)$$

die Anzahl η_{p^2} der Bahnen mit Länge p^2 bestimmen. Hier einige Werte:

p	$\binom{p^2}{p}$	η_p	η_{p^2}
2	6	3	0
3	84	4	8
5	53130	6	2124
7	85900584	8	1753072

Ein allgemeiner Ansatz zur Bestimmung der Bahnstruktur ist in Kapitel B zu finden.

Bemerkung 6.9 (Dimensionsreduzierung). Die Beschreibung der reduzierten Linksidealvarietät von Symbolalgebren in Proposition 6.8 läßt sich auch als Dimensionsreduzierung für Brauer-Severi-Varietäten verstehen: Die Plücker-Einbettung hat als Bildbereich den projektiven Raum $\mathbf{P}^{N-1}$ mit $N = \binom{d^2}{d}$. Nun werden bei allen Gleichungen der Grassmann-Varietät die Koordinaten x_M durch $D(M)x_{\Pi(M)}$ ersetzt. Durch die entstehenden Gleichungen wird die zu A gehörige Brauer-Severi-Varietät beschrieben, und zwar im projektiven Raum $\mathbf{P}^{\eta-1}$, wobei $\eta = \sum_i \eta_i$.
Im bekannten Fall $d = 2$ ergibt sich direkt aus der Grassmann-Varietät im $\mathbf{P}^5$ die Gleichung für die Brauer-Severi-Varietät im $\mathbf{P}^2$, im Fall $d = 3$ wird die Dimension von 83 auf 11 reduziert usw. Aus den Zahlen der Tabelle erahnt man schon, daß einzig der Fall $d = 3$ rechenpraktische Bedeutung hat. Dieser Fall wird im nächsten Abschnitt genauer betrachtet werden. Das Resultat in diesem Fall deutet aber an, daß Verallgemeinerungen möglich sind.

Diese Bemerkungen sollen nun praktisch angewendet werden.

Beispiel (d=2). Es gibt drei Bahnen, nämlich

$$\mathcal{M}_{2,G} = B\Big(\big((0,1),(1,1)\big)\Big) \cup B\Big(\big((1,0),(1,1)\big)\Big) \cup B\Big(\big((1,0),(0,1)\big)\Big).$$

Folgende Tabelle gibt die notwendigen Daten wieder. Dabei ist σ jeweils das Element, das den Repräsentanten $\Pi(M)$ in M überführt: $M = \sigma\Pi(M)$.

M	$\Pi(M)$	σ	$\mathrm{Nred}\, e_\sigma$	$s_\sigma(\Pi(M))$	$D(M)$
((0,0),(1,0))	((0,1),(1,1))	(0,1)	-b	b b	-b
((0,0),(0,1))	((1,0),(1,1))	(1,0)	-a	a (-a)	a
((0,0),(1,1))	((1,0),(0,1))	(1,0)	-a	a (-1)	1
((1,0),(0,1))	((1,0),(0,1))	(0,0)	1	1	1
((1,0),(1,1))	((1,0),(1,1))	(0,0)	1	1	1
((0,1),(1,1))	((0,1),(1,1))	(0,0)	1	1	1

Identifiziere der Übersichtlichkeit halber die Elemente aus $G = \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$ mit Zahlen durch die Abbildung

$$\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{Z}; (i,j) \longmapsto \underline{i} + d\underline{j},$$

d. h. $\big((0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\big)$ korrespondiert mit $\big(0,1,2,3\big)$. Ein Index M wird durch nebeneinanderstehende Zahlen repräsentiert. Dann ist die Repräsentantenmenge $\mathcal{R} = \{12, 13, 23\}$, obige Tabelle hat die Gestalt

M	$\Pi(M)$	σ	$\mathrm{Nred}\, e_\sigma$	$s_\sigma(\Pi(M))$	$D(M)$
01	23	2	-b	b b	-b
02	13	1	-a	a (-a)	a
03	12	1	-a	a (-1)	1
12	12	0	1	1	1
13	13	0	1	1	1
23	23	0	1	1	1

und die Ersetzungen $x_M = D(M)x_{\Pi(M)}$ sind

$$x_{01} = -bx_{23},$$
$$x_{02} = ax_{13},$$
$$x_{03} = x_{12}.$$

Wendet man diese auf die definierende Gleichung der Grassmann-Varietät[86]

$$V_k(4,2) = \mathrm{Z}\left\{x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12}\right\} \subseteq \mathbf{P}^5,$$

an, so ergibt sich wie in Abschnitt 3.3

$$V_{A,1} \cong \mathrm{Z}\left\{by_0^2 + ay_1^2 - y_2^2\right\} \subseteq \mathbf{P}^2.$$

durch den Isomorphismus

$$(x_{01} : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23}) \longmapsto (x_{23} : x_{13} : x_{12})\,.$$

Die Situation wird hier dadurch vereinfacht, daß die Grassmann-Varietät $V_k(4,2)$ durch nur eine Gleichung definiert wird, die nach Ersetzung der Koordinaten durch entsprechende Repräsentanten direkt in die Normgleichung übergeht. Im allgemeinen wird so etwas nicht zu erwarten sein, man kann allenfalls hoffen, unter einigen Koordinaten eine Normrelation nachweisen zu können. Dieses ist auch möglich. Es wird zunächst am Beispiel einer Symbolalgebra vom Grad 3 konkret durchgerechnet. Im nächsten Kapitel wird diese Rechnung etwas allgemeiner betrachtet. Diese Ergebnisse werden dann in den folgenden Kapiteln verallgemeinert, so daß sie für alle Symbolalgebren gelten und möglicherweise noch weiter verallgemeinert werden können, was aber in dieser Arbeit nicht mehr vorgenommen wird.

[86]Vgl. Abschnitt 2.3, allerdings mit anderer Nummerierung der Indizes.

6.4 Beispiel: Symbolalgebren vom Grad 3

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus Kapitel 5 und aus dem vorigen Abschnitt auf den Fall einer Symbolalgebra vom Grad 3 angewendet. Zum einen läßt sich dadurch die Beschreibung der dazugehörigen Brauer-Severi-Varietät V_A vereinfachen (die 4536 definierenden Gleichungen können auf 138 reduziert werden). Diese Beschreibung ist aber auch nicht ganz zufriedenstellend. Allerdings erleichtert sie das Auffinden weiterer Zusammenhänge zwischen den Koordinaten von Punkten aus V_A. In einem konkreten Fall wird gezeigt, daß eine Normrelation zwischen bestimmten Koordinaten besteht. Diese Aussagen werden in den nächsten Kapiteln verallgemeinert: Es wird gezeigt, wie sich V_A durch Normvarietäten beschreiben läßt.

Sei A nun die Symbolalgebra $\left(\frac{a,b}{k,\xi}\right)$ vom Grad 3 mit einer primitiven dritten Einheitswurzel $\xi \in k$ und $a, b \in k^*$.

Bahnstruktur
Die Überlegungen des vorigen Kapitels ergaben für die Bahnstruktur von A, daß es vier Bahnen der Länge 3 und acht Bahnen der Länge 9 gibt. Verwende wieder die Identifizierung der Elemente aus $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ mit Zahlen durch die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (i,j) & \longmapsto & \underline{i} + d\underline{j}. \end{array}$$

Schreibe Indizes M als nebeneinanderstehende Zahlen. Ordne zur Veranschaulichung wieder jedem Index ein Muster in einer Tabelle von Punkten zu und interpretiere die Operation von G als Verschiebung in horizontaler bzw. vertikaler Richtung, konkret:

$$\{0,\ldots,8\} \supseteq M \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} \mathrm{M} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Wähle für die Bahnen folgende Repräsentanten:

$|B(M)| = 3$:

$$\begin{array}{c|ccc} 012 & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 036 & & & \\ \hline & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 048 & & & \\ \hline & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \bullet & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 057 & & & \\ \hline & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \bullet \\ & \cdot & \bullet & \cdot \end{array}$$

$|B(M)| = 9:$

$$
\begin{array}{c|ccc} 013 & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \cdot \\ & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc} 014 & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \cdot \\ & \cdot & \bullet & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc} 015 & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \bullet \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc} 016 & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot & \cdot \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc} 017 & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \bullet & \cdot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc} 018 & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \bullet \end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc} 037 & & & \\ \hline & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \bullet & \cdot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc} 038 & & & \\ \hline & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \bullet \end{array}
$$

Also:

$$
\begin{array}{lcl}
|B(M)| \in \{3, 9\} & & \\
|B(M)| = 3 & \Longrightarrow & B(M) \in \{\ B(012), B(036), B(048), B(057)\ \} \\
|B(M)| = 9 & \Longrightarrow & B(M) \in \left\{ \begin{array}{l} B(013),\ B(014),\ B(015),\ B(016), \\ B(017),\ B(018),\ B(037),\ B(038) \end{array} \right\}
\end{array}
$$

Reduzierte Plücker-Relationen

Nun lassen sich wie im Beispiel „$d = 2$“ für jeden Index $M \in \mathcal{M}_d$ entsprechende Daten berechnen (siehe dazu Anhang C). Ersetzt man in den Plücker-Relationen alle Koordinaten durch die entsprechenden Repräsentanten mit dazugehörigen Faktoren nach der Regel

$$x_M = D(M) x_{\Pi(M)} \quad \text{mit } D(M) := \frac{s_\sigma\big(\Pi(M)\big)}{\operatorname{Nred} e_\sigma},$$

so werden viele Relationen gleich, ihre Zahl reduziert sich von $36 \cdot 126 = 4536$ auf[87] 138. Durch diese Gleichungen wird die Brauer-Severi-Varietät von A beschrieben. Eine Liste dieser Gleichungen ist auch im Anhang C zu finden. Sie soll keine Beweiskraft haben, sondern diente der Hypothesenbildung: Wie läßt sich die Beschreibung weiter vereinfachen? Einen Anhaltspunkt bietet die bekannte Tatsache, die aus den Sätzen 4.21 und 6.4 folgt:

[87] Der allgemeine Zusammenhang dieser Zahlen wurde nicht untersucht, eine Formel scheint nur schwer aufzustellen zu sein. Zwar weisen die Relationen eine gewisse Regelmäßigkeit auf, wenn man sie z. B. nach Zahl und Art der auftretenden Variablen sortiert, aber es wurde keine Möglichkeit gefunden, direkt auf kompliziertere Fälle zu schließen.

Satz 6.10. *Sei $d \in \mathbb{N}$ und ξ eine primitive d-te Einheitswurzel in k. Für eine Symbolalgebra $A = \left(\frac{a,b}{k,\xi}\right)$ vom Grad d sind folgende Aussagen äquivalent*

i) *A zerfällt, d.h. $A \cong \operatorname{Mat}_d k$.*

ii) *$V_A(k) \neq \emptyset$.*

iii) *$b \in N_{K/k}(K^*)$ mit $K := k[t]/(t^d - a)$.*[88]

Beweis. Sätze 4.21 und 6.4. □

Eine Normrelation unter den Koordinaten

Sei o. E. a keine dritte Potenz in k (dann wäre A trivial, d. h. isomorph zu einer Matrixalgebra). Dann ist $K = k[t]/(t^3 - a)$ ein Körper mit Norm

$$N_{K/k}(y_0+ty_1+t^2y_2) = y_0^3+ay_1^3+a^2y_2^3-ay_0y_1y_2.$$

Mit dem Ziel, eine Normrelation zwischen den Koordinaten aufzustellen, findet man folgendes: Schreibe abkürzend die Repräsentanten als

$$\begin{array}{cccccc} x_0 := x_{013} & x_1 := x_{014} & x_2 := x_{015} & x_3 := x_{016} & x_4 := x_{017} & x_5 := x_{018} \\ x_6 := x_{037} & x_7 := x_{038} & x_8 := x_{012} & x_9 := x_{036} & x_{10} := x_{048} & x_{11} := x_{057} \end{array}$$

Betrachte einen Punkt $x = \overline{k}^* \sum x_M e_M$ aus V_A und folgende Plücker-Relationen, in denen wie oben beschrieben die Koordinaten durch ihre Repräsentanten ersetzt werden:

$$\begin{aligned} P_{01,0235}(x) &= \underbrace{x_{010}}_{=0} x_{235} - x_{012}x_{035} + x_{013}x_{025} - x_{015}x_{023} \qquad (*) \\ &= \xi^2 x_8 x_4 - a^{-1}x_0^2 + x_1x_2, \\ P_{01,0234}(x) &= x_{010}x_{234} - x_{012}x_{034} + x_{013}x_{024} - x_{014}x_{023} \\ &= -\xi x_8 x_3 - x_0x_2 + x_1^2, \\ P_{01,0245}(x) &= x_{010}x_{245} - x_{012}x_{045} + x_{014}x_{025} - x_{015}x_{024} \\ &= -x_8x_5 - a^{-1}x_0x_1 + x_2^2. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit bestimmten Faktoren erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_0^3 - ax_0x_1x_2 &= \xi^2 a x_8 x_0 x_4, \\ ax_1^3 - ax_0x_1x_2 &= \xi a x_8 x_1 x_3, \\ a^2x_2^3 - ax_0x_1x_2 &= a^2 x_8 x_2 x_5. \end{aligned}$$

[88] Auch wenn K kein Körper ist, ist die Norm $N_{K/k}$ wie gewöhnlich als Produkt aller Konjugierten definiert, wobei die Automorphismen $\sigma_i(t) = \xi^i t$ mit $i = 0, \ldots, d-1$ sind (siehe Abschnitt 6.1).

Addition der Gleichungen liefert

$$x_0^3+ax_1^3+a^2x_2^3-3ax_0x_1x_2 = x_8\big(\xi^2 ax_0x_4+\xi ax_1x_3+a^2x_2x_5\big). \qquad (**)$$

Betrachte nun noch

$$\begin{aligned} P_{01,2345}(x) &= x_{012}x_{345} - x_{013}x_{245} + x_{014}x_{235} - x_{015}x_{234} \\ &= b^{-1}x_8^2 - \xi^2a^{-1}x_0x_4 - \xi a^{-1}x_1x_3 - x_2x_5. \end{aligned}$$

Mit a^2 multipliziert ergibt sich

$$\xi^2ax_0x_4+\xi ax_1x_3+a^2x_2x_5 = a^2b^{-1}x_8^2\ ,$$

und in $(**)$ eingesetzt gibt das

$$x_0^3+ax_1^3+a^2x_2^3-3ax_0x_1x_2 = \frac{a^2}{b}x_8^3.$$

Dies ist die gesuchte Normrelation und man erhält

$$A \text{ zerfällt} \quad\Longrightarrow\quad \frac{a^2}{b} \in N_{K/k}(K^*)\ .$$

Bezeichnet man mit $ZN_{a,b} \subseteq \mathbf{P}^3$ die Nullstellenmenge von

$$\begin{aligned} f(y,y_0,y_1,y_2) :=& N_{K/k}(y_0+ty_1+t^2y_2) - \frac{a^2}{b}y^3 \\ =& y_0^3+ay_1^3+a^2y_2^3-ay_0y_1y_2 - \frac{a^2}{b}y^3 \end{aligned}$$

und mit $U_8 := U_{(012)}$ die offene Menge aller Punkte $\overline{k}^*\sum_M x_Me_M$ im $\mathbf{P}\bigwedge^3 k^9$ mit $x_{(012)} \neq 0$, so ist

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V_A \cap U_8 & \longrightarrow & ZN_{a,b} \\ & \overline{k}^*\sum_M x_Me_M & \longmapsto & (x_8:x_0:x_1:x_2) \end{array}$$

ein Morphismus. Aus $(*)$ erhält man

$$\begin{aligned} x_4 =& \frac{\xi a^{-1}x_0^2 - \xi x_1x_2}{x_8}, \\ x_3 =& \frac{-\xi^2x_0x_2+\xi^2x_1^2}{x_8}, \\ x_5 =& \frac{-a^{-1}x_0x_1+x_2^2}{x_8}, \end{aligned}$$

d. h. aus den Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_8 lassen sich für $x_8 \neq 0$ die Koordinaten x_3, x_4, x_5 gewinnen. Diese Koordinaten reichen, um über die Umkehrung der Plückereinbettung $P^*_{(012)}$ eine Umkehrabbildung zu φ zu konstruieren. Es folgt, daß $V_A \cap U_8$ isomorph zum Bild unter φ in $ZN_{a,b}$ ist. Aus Dimensionsgründen sind also beide Varietäten birational äquivalent.
Die umgekehrte Schlußrichtung des Normkriteriums läßt sich hieraus aber nicht ableiten, da die genaue Größe des Bildes von $V_A \cap U_8$ in $ZN_{a,b}$ nicht bekannt ist. Um dies zu erhalten, wird im nächsten Kapitel eine konkrete Umkehrabbildung entwickelt, aus der dann die Äquivalenz im Normkriterium folgt.

Teil III

Brauer-Severi-Varietäten von Symbolalgebren

Kapitel 7

Beispiel: Symbolalgebren vom Grad 3

Im Abschnitt 6.4 wurden Linksidealvarietäten von Symbolalgebren vom Grad 3 untersucht. Die Ergebnisse wurden dann dazu benutzt, die dazugehörigen Brauer-Severi-Varietäten genauer zu bestimmen. Zunächst wurde eine Liste von 138 Gleichungen angegeben, die mit Hilfe eines Computers erstellt wurde (schon im Fall d=3 ist Handarbeit fast unmöglich). Zwar ließe sich diese noch reduzieren, denn der k-Vektorraum der Polynome in 12 Veränderlichen vom Grad kleiner oder gleich 2 hat die Dimension $1 + 12 + 11 \cdot 12/2 + 12 = 91$, aber die zu erwartenden Ergebnisse bleiben unbefriedigend:
Einerseits liefert etwa eine Gröbner-Basis-Bestimmung[89] eine Liste von 185 Polynomen, überwiegend mit mehr Summanden und höheren Grades als die reduzierten Plücker-Polynome; es ist also so keine wesentliche Vereinfachung zu erwarten. Andererseits setzt die Rechnerleistung diesem Vorgehen Grenzen: Die Reduktion der Liste der 4536 Plücker-Polynome im Fall d=3 dauerte[90] ca. 2 Minuten. Angenommen, der Zeitbedarf wächst proportional zur Anzahl der Polynome,[91] so würde die Reduzierung im Fall d=4 ca. 18 Stunden und im Fall d=5 gut 2 Jahre dauern.
Die Rechnungen am Ende von Abschnitt 6.4 zeigen dagegen, wie eine übersichtliche Beschreibung von Brauer-Severi-Varietäten aussehen kann: Unter Einbeziehung der früheren Ergebnisse wurde gezeigt, daß die Koordinaten eines Punktes der Brauer-Severi-Varietät $V_{A,1}$ einer Symbolalgebra A vom Grad 3 eine Normrelation erfüllen, d. h. $V_{A,1}$ läßt sich geometrisch in Be-

[89] Verwendet wurde wie auch zur Bestimmung der Liste der reduzierten Plücker-Polynome (siehe Anhang C) das Computer-Algebra-Programm Mathematica 2.2.

[90] Auf einem durchschnittlichen aktuellen PC (300 MHz, 64 MB).

[91] Tatsächlich wird der Aufwand, derart große Listen zu handhaben, zusätzlich Zeit kosten.

ziehung setzen zu einer Normvarietät. Die Möglichkeiten, diese Beziehung auszuweiten, sollen in diesem dritten Teil untersucht werden, zunächst wieder für den Fall einer Symbolalgebra vom Grad 3, dann für beliebige Symbolalgebren und in Einzelfällen auch für weitere Beispiele.
Um Probleme, bei denen die Notation von sortierten Tupeln verwendet wird, allgemein zu betrachten, ist es günstig und häufig viel natürlicher, auf die Sortierung zu verzichten. Als eine Konvention für den ganzen dritten Teil dieser Arbeit wird deshalb abweichend vom zweiten Teil folgende Bezeichnung verwendet:

Schreibweise. Sei G eine Gruppe, $\sigma \in G$ und $N = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu) \in \mathcal{M}^\circ_{\nu,G}$.

$$\begin{aligned} \sigma N &:= (\sigma\sigma_1, \ldots, \sigma\sigma_\nu) \ , \\ N\sigma &:= (\sigma_1\sigma, \ldots, \sigma_\nu\sigma) \ . \end{aligned}$$

7.1 Sortierungsunabhängige Plücker-Relationen

Wichtig ist die Erweiterung der Notation für Plücker-Relationen, so daß diese nicht nur für sortierte Tupel definiert sind. Dazu sind einige neue Definitionen und erweiterte Aussagen notwendig, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden.
Zunächst wird der Zusammenhang zwischen sortierungsabhängiger und sortierungsunabhängiger Schreibweise untersucht. Sei dazu X eine Menge von n Elementen, auf der eine lineare Ordnung „$<$“ definiert ist, und $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq n$.
Sei $N \in \mathcal{M}^\circ_{\nu,X}$. Bezeichne mit $\operatorname{sign} N$ das Vorzeichen der Permutation aus $\mathcal{S}_\nu$, die N bezüglich „$<$“ sortiert.
Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \leq n$, $M \in \mathcal{M}^\circ_{d-1,X}$ und $M' \in \mathcal{M}^\circ_{d+1,X}$. Betrachte die folgenden Diagramme mit Permutationen $\pi = \pi''\pi'$ bzw. $\rho = \rho''\rho'$ aus $\mathcal{S}_d$ und i aus M' mit $i \notin M$:

$$\begin{tikzcd} M+i \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dr, "\pi"'] & \overline{M}+i \arrow[d, "\pi''"] \\ & \overline{M+i} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\rho'"] \arrow[dr, "\rho"'] & i+\overline{M'-i} \arrow[d, "\rho''"] \\ & \overline{M'} \end{tikzcd} \quad .$$

Sei hier, abweichend von der Definition auf Seite 11, die Funktion pos definiert durch $\operatorname{pos}(i_j, M') = j$ für $M' = (i_0, i_1, \ldots, i_d)$, d. h. das erste Element hat den Funktionswert 0. Aus $\operatorname{sign}\pi' = \operatorname{sign} M$ und $\operatorname{sign}\rho = \operatorname{sign} M'$ folgt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}\pi'' \operatorname{sign} M = \operatorname{sign}\pi = \operatorname{sign}(M+i),\\
&\operatorname{sign}\rho'' \operatorname{sign} M' = \operatorname{sign}\rho'\big(\operatorname{sign}\rho''\big)^2 = \operatorname{sign}\rho' = (-1)^{\operatorname{pos}(i,M')}\operatorname{sign}(M'-i).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
x_{\overline{M},i} &= \operatorname{sign}\pi'' x_{\overline{M}\cup i}\ ,\\
(-1)^{\operatorname{pos}(i,\overline{M'})} x_{\overline{M'}-i} &= \operatorname{sign}\rho'' x_{\overline{M'}-i}
\end{aligned}$$

und deshalb ist

$$\begin{aligned}
x_{\overline{M},i}\operatorname{sign} M &= \operatorname{sign}\pi''\operatorname{sign} M x_{\overline{M}\cup i}\\
&= \operatorname{sign}(M+i) x_{\overline{M}\cup i}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(-1)^{\operatorname{pos}(i,\overline{M'})} x_{\overline{M'}-i}\operatorname{sign} M' &= \operatorname{sign}\rho''\operatorname{sign} M' x_{\overline{M'}-i}\\
&= (-1)^{\operatorname{pos}(i,M')}\operatorname{sign}(M'-i) x_{\overline{M'}-i}.
\end{aligned}$$

Aus dem Plücker-Polynom

$$P_{\overline{M},\overline{M'}}(x) = \sum_{i\in M'} (-1)^{\operatorname{pos}(i,\overline{M'})} x_{\overline{M},i} x_{\overline{M'}-i}$$

wird nach Multiplikation mit den Konstanten $\operatorname{sign} M$ und $\operatorname{sign} M'$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in M'} (-1)^{\operatorname{pos}(i,M')}\operatorname{sign}(M+i) x_{\overline{M}\cup i}\operatorname{sign}(M'-i) x_{\overline{M'}-i}\\
&= \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \operatorname{sign}(M+i_j) x_{\overline{M}\cup i_j}\operatorname{sign}(M'-i_j) x_{\overline{M'}-i_j}
\end{aligned}$$

mit $M' = (i_0, \ldots, i_d)$.

Definition. Sei X eine Menge mit n Elementen, auf der eine lineare Ordnung „ $<$ “ definiert ist.

i) Sei $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq n$ und $k[x_M | M \in \mathcal{M}_\nu]$ der Polynomring über k in $\binom{n}{\nu}$ Variablen. Sei $N = (i_1, \ldots, i_\nu) \in X^\nu$ ein beliebiges ν-Tupel. Definiere

$$[N] := \begin{cases} \operatorname{sign} N\ x_{\overline{N}} & \text{falls } N \in \mathcal{M}_\nu^\circ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\ .$$

$[N]$ ist aus $k[x_M | M \in \mathcal{M}_\nu]$. Durch Einsetzung von Punkten aus $\bigwedge^\nu k^n$ erhält man Skalare, konkret: Sei $w := \sum_M p_M e_M \in \bigwedge^\nu k^n$. Definiere

$$[N]_w := \begin{cases} \operatorname{sign} N \; p_{\overline{N}} & \text{falls } N \in \mathcal{M}_\nu^\circ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ist $w = \wedge b$ mit $b \in \mathrm{St}_{\nu,n}\, k$ ein zerlegbarer Vektor, so ist

$$[N]_b := [N]_w = \det b_N .$$

Wenn klar ist, was gemeint ist, so kann die Indizierung wegfallen.

ii) Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d+1 \leq n$, $M \in \mathcal{M}_{d-1}^\circ$ und $M' \in \mathcal{M}_{d+1}^\circ$. Definiere *(sortierungsunabhängige) Plücker-Polynome*

$$\tilde{P}_{M,M'}(x) := \sum_{j=0}^{d} (-1)^j [M+i_j][M'-i_j] .$$

Seien $M \in \mathcal{M}_{d-1}^\circ$ und $M' \in \mathcal{M}_{d+1}^\circ$. Sind M und M' sortiert, so sind die Polynome $\tilde{P}_{M,M'}$ im wesentlichen die früher definierten Plücker-Polynome[92]

$$P_{M,M'}(x) := \sum_{j=0}^{d} (-1)^j x_{M,i_j} x_{M'-i_j},$$

genauer: Sind M und M' nicht unbedingt sortiert, so gilt

$$\epsilon \, P_{\overline{M},\overline{M'}} \;=\; \tilde{P}_{M,M'}$$

mit $\epsilon := \operatorname{sign} M \operatorname{sign} M'$. Deshalb gilt

$$P_{\overline{M},\overline{M'}}(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{P}_{M,M'}(x) = 0$$

und es folgt

Bemerkung 7.1.

i) Seien $\mathcal{N}_\nu \subseteq \mathcal{M}_\nu^\circ$ für $\nu = d \pm 1$ Teilmengen mit der Eigenschaft

$$\{\overline{M} \mid M \in \mathcal{N}_\nu\} = \mathcal{M}_\nu.$$

Dann gilt

$$V_k(n,d) \;=\; \mathrm{Z}\left(\tilde{P}_{M,M'}(x) \;\middle|\; M \in \mathcal{N}_{d-1}, M' \in \mathcal{N}_{d+1}\right) .$$

[92] Siehe Seite 21.

ii) Ist $x \in V_k(n,d)$, so gilt

$$\tilde{P}_{M,M'}(x) = 0$$

für alle $M \in \mathcal{M}^\circ_{d-1}$ und $M' \in \mathcal{M}^\circ_{d+1}$.

Der Vorteil dieser neuen Plücker-Polynome liegt darin, daß nun Tupel betrachtet werden können, die nicht unbedingt geordnet sind.

Die neue Schreibweise $[N]_w$ für $w \in \bigwedge^\nu k^n$ läßt sich auch auf die Situation bei verschränkten Gruppenalgebren anwenden: Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n = d^2$, auf der eine beliebige lineare Ordnung „$<$" definiert ist, $(s) \in \mathrm{H}^2(G, k^*)$ eine 2-Kozykelklasse mit normiertem Repräsentanten s und A die verschränkte Gruppenalgebra $(G,s)_k$, so daß A zentraleinfach ist. Sei $1 \leq \mu < d$ und $m := \mu d$. Für $N = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu) \in \mathcal{M}^\circ_{\nu,G}$ sei[93]

$$\sigma N := (\sigma\sigma_1, \ldots, \sigma\sigma_\nu) \; .$$

Dann gilt analog zu Proposition 5.11 eine Ersetzungsrelation.

Proposition 7.2. *Für $\overline{k}^* w \in \tilde{L}_{A,\mu}$, $N \in \mathcal{M}^\circ_{d,G}$ und $\sigma \in G$ gilt*

$$[N]_w = \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s^\circ_\sigma(N)} \, [\sigma N]_w$$

mit

$$s^\circ_\sigma(N) := \prod_{\tau \in N} s_{\sigma,\tau}.$$

Beweis. Sei $\overline{k}^* w = \overline{k}^* \sum_M p_M e_M \in \tilde{L}_{A,\mu}$.

$$\begin{aligned} [N]_w &= \operatorname{sign} N p_{\overline{N}} = \operatorname{sign} N \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma(\overline{N})} p_{\overline{\sigma N}} = \operatorname{sign} N \operatorname{sign}_\sigma \overline{N} \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s^\circ_\sigma(N)} p_{\overline{\sigma N}} \\ &= \operatorname{sign} \sigma N \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s^\circ_\sigma(N)} p_{\overline{\sigma N}} = \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s^\circ_\sigma(N)} [\sigma N]_w. \end{aligned}$$

□

[93] Anders als in früheren Abschnitten ist hier nicht das sortierte Tupel gemeint; siehe die Festlegung der Schreibweise auf Seite 118.

7.2 Normrelationen

Bei der Berechnung einer Normrelation im Beispiel aus Abschnitt 6.4 wurde eine sehr spezielle Situation betrachtet, um die Schritte leichter nachvollziehbar zu machen. Hier wie auch später ist es allerdings günstiger, gleich von einer allgemeineren Situation auszugehen, in der die Notation der sortierungsunabhängigen Plücker-Relationen aus dem vorigen Abschnitt verwendet wird.

Sei A wie in Abschnitt 6.4 eine Symbolalgebra vom Grad 3 mit $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Sei folgendes vorgegeben

$$G = \langle\sigma\rangle \times \langle\tau\rangle,$$
$$\sigma_0 \in G.$$

Verwende nun die Identifizierung der Elemente aus $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ mit Zahlen durch die Abbildung

$$\langle\sigma\rangle \times \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}; \sigma_0\sigma^i\tau^j \longmapsto i+3j \quad \text{mit} \quad 0 \le i, j \le 2.$$

Um diese Identifizierung von der aus Abschnitt 6.4 unterscheiden zu können, werden hier die Zahlen fett geschrieben, z. B. $\mathbf{3} = \sigma_0\tau$. Definiere damit

$$N := (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}),\ N_0 := (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3}),\ N_1 := (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}),\ N_2 := (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{5})\ .$$

Durch die verschiedenen Identifizierungen von Zahlen mit den Elementen aus G läßt sich die Veranschaulichung der Bahnen von oben und die Vorgehensweise bei der Herleitung der Normrelation leicht übertragen. So läßt sich das Repräsentantensystem von oben auf diese Situation übertragen und man erhält die Zerlegung

$$\mathcal{M}_{3,9} = \dot{\bigcup_{M \in \mathcal{R}}} B(M)$$

mit

$$\mathcal{R} := \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{3}),\ (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{4}),\ (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{5}),\ (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{6}),\ (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{7}),\ (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{8}) \\ (\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{7}),\ (\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{8}),\ (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}),\ (\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{6}),\ (\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{8}),\ (\mathbf{0},\mathbf{5},\mathbf{7}) \end{array} \right\}.$$

Betrachte die Plücker-Polynome[94]

$$\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{5})}(x) = -[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}][\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{5}] + [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{4}][\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{5}] - [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{5}][\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4}],$$
$$\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{5})}(x) = -[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{5}] + [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{3}][\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{5}] - [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{5}][\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3}],$$
$$\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4})}(x) = -[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{4}] + [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{3}][\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4}] - [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{4}][\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3}]$$

[94] Siehe zu den Schreibweisen Abschnitt 7.1. Schreibe abkürzend $[i_1, \ldots, i_d]$ für $[(i_1, \ldots, i_d)]$, $s_\sigma(i_1, \ldots, i_d)$ für $s_\sigma((i_1, \ldots, i_d))$ usw.

und die Ersetzungen[95]

$$\begin{aligned}
[\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3}] &= \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3})}[\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{4}] = -\frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3})}[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{4}],\\
[\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4}] &= -\frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4})}[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{5}],\\
[\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{5}] &= -\frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{5})}[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{3}].
\end{aligned}$$

In die dazugehörigen Plücker-Relationen eingesetzt und mit $[N_2]$, $[N_0]$ bzw. $[N_1]$ multipliziert, erhält man für einen Punkt $x = \overline{k}^* \sum x_M e_M \in V_A := V_{A,1}$

$$\begin{aligned}
[N][N_2][\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{5}] &= -\frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{5})}[N_1][N_0][N_2] + \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4})}[N_2]^3,\\
[N][N_0][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{5}] &= -\frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{5})}[N_0]^3 + \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3})}[N_2][N_1][N_0],\\
[N][N_1][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{4}] &= -\frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4})}[N_0][N_2][N_1] + \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3})}[N_1]^3.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\operatorname{Nred} e_\sigma = s_\sigma(B_\sigma(\sigma_0)) = (-1)^{d-1} s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}) \overset{d=3}{\equiv} s_\sigma^\circ(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2})$$

erhält man nach Multiplizieren mit geeigneten Faktoren

$$\begin{aligned}
s_{\sigma,\mathbf{5}}[N][N_2][\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{5}] &= -s_{\sigma,\mathbf{1}}[N_1][N_0][N_2] + \frac{s_{\sigma,\mathbf{1}}s_{\sigma,\mathbf{5}}}{s_{\sigma,\mathbf{4}}}[N_2]^3,\\
s_{\sigma,\mathbf{3}}[N][N_0][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{5}] &= -\frac{s_{\sigma,\mathbf{1}}s_{\sigma,\mathbf{3}}}{s_{\sigma,\mathbf{5}}}[N_0]^3 + s_{\sigma,\mathbf{1}}[N_2][N_1][N_0],\\
s_{\sigma,\mathbf{4}}[N][N_1][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{4}] &= -s_{\sigma,\mathbf{1}}[N_0][N_2][N_1] + \frac{s_{\sigma,\mathbf{1}}s_{\sigma,\mathbf{4}}}{s_{\sigma,\mathbf{3}}}[N_1]^3.
\end{aligned} \tag{$*$}$$

Eine analoge Berechnung führt zu

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})}(x)\\
&\quad= [N][\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5}] - [N_0][\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{5}] + [N_1][\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{5}] - [N_2][\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}]\\
&\quad= \frac{\operatorname{Nred} e_{\tau^2}}{s_{\tau^2}^\circ(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})}[N]^2 + \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{5})}[N_0][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{5}]\\
&\qquad - \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{5})}[N_1][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{4}] - \frac{\operatorname{Nred} e_\sigma}{s_\sigma^\circ(\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4})}[N_2][\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{5}].
\end{aligned}$$

[95] Siehe dazu Proposition 7.2.

Die dazugehörige Plücker-Relation läßt sich wegen $\operatorname{Nred} e_\sigma = s^\circ_\sigma(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})$ schreiben als

$$\frac{s_{\sigma,\mathbf{2}} \operatorname{Nred} e_{\tau^2}}{s^\circ_{\tau^2}(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})}[N]^2 = -s_{\sigma,\mathbf{3}}[N_0][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{5}]+s_{\sigma,\mathbf{4}}[N_1][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{4}]+s_{\sigma,\mathbf{5}}[N_2][\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{5}].$$

Setzt man in diese Gleichung nach Multiplikation mit $[N]$ obige Gleichungen $(*)$ ein, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}&\frac{s_{\sigma,\mathbf{2}} \operatorname{Nred} e_{\tau^2}}{s^\circ_{\tau^2}(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})}[N]^3 \\ &= \frac{s_{\sigma,\mathbf{1}}s_{\sigma,\mathbf{3}}}{s_{\sigma,\mathbf{5}}}[N_0]^3 + \frac{s_{\sigma,\mathbf{1}}s_{\sigma,\mathbf{4}}}{s_{\sigma,\mathbf{3}}}[N_1]^3 + \frac{s_{\sigma,\mathbf{1}}s_{\sigma,\mathbf{5}}}{s_{\sigma,\mathbf{4}}}[N_2]^3 - 3s_{\sigma,\mathbf{1}}[N_0][N_1][N_2]\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&\frac{s_{\sigma,\mathbf{2}}\ \operatorname{Nred} e_{\tau^2}}{s_{\sigma,\mathbf{1}}\ s^\circ_{\tau^2}(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})}[N]^3 \\ &= \frac{s_{\sigma,\mathbf{3}}}{s_{\sigma,\mathbf{5}}}[N_0]^3 + \frac{s_{\sigma,\mathbf{4}}}{s_{\sigma,\mathbf{3}}}[N_1]^3 + \frac{s_{\sigma,\mathbf{5}}}{s_{\sigma,\mathbf{4}}}[N_2]^3 - 3[N_0][N_1][N_2].\end{aligned} \tag{$**$}$$

Definiere

$$\begin{aligned}n(\sigma_0,\sigma,\tau) :=\ & s^2_{\sigma,\mathbf{3}}\ s_{\sigma,\mathbf{4}}[N_0]^3 + s^2_{\sigma,\mathbf{4}}\ s_{\sigma,\mathbf{5}}[N_1]^3 + s^2_{\sigma,\mathbf{5}}\ s_{\sigma,\mathbf{3}}[N_2]^3 \\ & - 3\operatorname{Nred} e_\sigma[N_0][N_1][N_2]\ ,\end{aligned}$$

$$q(\sigma_0,\sigma,\tau) := \operatorname{sign} N \frac{s_{\sigma,\mathbf{2}}\ \operatorname{Nred} e_{\tau^2}\ \operatorname{Nred} e_\sigma}{s_{\sigma,\mathbf{1}}\ s^\circ_{\tau^2}(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})}$$

und

$$N(\sigma_0,\sigma,\tau) := n(\sigma_0,\sigma,\tau) - q(\sigma_0,\sigma,\tau)x^3_{\overline{N}}\ .$$

Dann hat obige Gleichung $(**)$ die Form

$$N(\sigma_0,\sigma,\tau) = 0\ .$$

Fasse $n(\sigma_0,\sigma,\tau)$ und $N(\sigma_0,\sigma,\tau)$ als Polynome in $y := x_{\overline{N}},\ y_0 := x_{\overline{N_0}},\ y_1 := x_{\overline{N_1}},\ y_2 := x_{\overline{N_2}}$ auf. Es wurde nicht systematisch untersucht, welche Gleichungen durch $N(\sigma_0,\sigma,\tau) = 0$ für verschiedene Werte σ_0,σ,τ tatsächlich erhalten werden können. Häufig kann man eine Gleichung durch lineare Transformation auf die Form einer Normrelation bringen. Hier lediglich eine Liste mit einigen Auswertungen.

σ_0	σ	τ	$\lambda\, N(i,\sigma,\tau)=0$	λ
0	1	3	$y_0^3+ay_1^3+a^2y_2^3-3ay_0y_1y_2=\frac{a^2}{b}y^3$	1
1	1	3	$ay_0^3+a^2y_1^3+y_2^3-3ay_0y_1y_2=\frac{1}{b}y^3$	1
2	1	3	$-a^2y_0^3-y_1^3-ay_2^3+3ay_0y_1y_2=\frac{a}{b}y^3$	1
3	1	3	$y_0^3+ay_1^3+a^2y_2^3-3ay_0y_1y_2=\frac{a^2}{b}y^3$	1
0	2	3	$y_0^3+a^2y_1^3+ay_2^3-3ay_0y_1y_2=\frac{a}{b}y^3$	$\frac{1}{a}$
0	3	1	$-y_0^3+by_1^3+b^2y_2^3+3by_0y_1y_2=\frac{b^2}{a}y^3$	1
0	4	1	$-ay_0^3+a^2by_1^3+b^2y_2^3+3\xi^2aby_0y_1y_2=a^2b^2y^3$	ξ^2

Diese Überlegungen können nun auf verschiedene Weise gedeutet werden. Zunächst erhält man eine arithmetische Aussage:

Bemerkung 7.3. Es gilt

$$x\in V_A \quad\Longrightarrow\quad N(\sigma_0,\sigma,\tau)(\tilde{x})=0$$

mit $\tilde{x}:=(x_{\overline{N}},x_{\overline{N}_0},x_{\overline{N}_1},x_{\overline{N}_2})$.

Allerdings kann es passieren, daß $x_{\overline{N}}$ trivial ist, so daß man daraus keine Aussage für $q(\sigma_0,\sigma,\tau)$ ableiten kann. Bezeichnet man mit $ZN(\sigma_0,\sigma,\tau)\subseteq \mathbf{P}^3$ die Nullstellenmenge des Polynoms $N(\sigma_0,\sigma,\tau)$ in $\mathbf{P}^3$, so erhält man folgenden über k definierten Morphismus

$$\begin{array}{ccc} V_A\cap U_{\overline{N}} & \longrightarrow_k & ZN(\sigma_0,\sigma,\tau)\ , \\ \overline{k}^*\sum_M x_M e_M & \longmapsto & \left(x_{\overline{N}}:x_{\overline{N}_0}:x_{\overline{N}_1}:x_{\overline{N}_2}\right) \end{array}$$

wobei wie üblich $U_{\overline{N}}$ die offene Menge der Punkte $\overline{k}^*\sum_M x_M e_M$ mit $x_{\overline{N}}\neq 0$ bezeichnet, und die Aussage:

Bemerkung 7.4.

$$\left(V_A\cap U_{\overline{N}}\right)(k)\neq\emptyset \quad\Longrightarrow\quad ZN(\sigma_0,\sigma,\tau)(k)\neq\emptyset.$$

Definiere

$$W(\sigma_0,\sigma,\tau):=n(\sigma_0,\sigma,\tau)(k^4)\ ,$$

d. h. $W(\sigma_0,\sigma,\tau)$ ist die Wertemenge, die man aus dem Polynom $n(\sigma_0,\sigma,\tau)$ erhält, wenn man Werte aus k einsetzt. Hat $ZN(\sigma_0,\sigma,\tau)$ einen k-rationalen

Punkt, so gilt $q(\sigma_0, \sigma, \tau) \in W(\sigma_0, \sigma, \tau)$. Wenn nun $n(\sigma_0, \sigma, \tau)$ als Normpolynom einer Körpererweiterung K/k gedeutet werden kann, so kann man aus der Existenz eines k-rationalen Punktes in $V_A \cap U_N$ folgern, daß $q(\sigma_0, \sigma, \tau)$ Norm in K/k ist. Um diese Aussage auf die Zerfallseigenschaft von A zurückzuführen, braucht man noch folgende Aussage:

Bemerkung 7.5. Sei $n(\sigma_0, \sigma, \tau)$ anisotrop über k, d. h. habe die Gleichung $n(\sigma_0, \sigma, \tau) = 0$ einzig die triviale Lösung über k. Sei $N' := (1, \tau, \tau^2)$. Dann gilt

$$V_A(k) \subset U_{\overline{N}} \cup U_{\overline{N}'}.$$

Beweis. Sei $x \in V_A(k)$.
Ann.: $x_{\overline{N}} = 0$ und $x_{\overline{N}'} = 0$. Dann ist $n(i, \sigma, \tau)(\tilde{x}) = 0$, und es folgt $x_{\overline{N}_0} = 0$, $x_{\overline{N}_1} = 0$ und $x_{\overline{N}_2} = 0$, d. h.

$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}] = 0,\ [\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}] = 0,\ [\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3}] = 0,\ [\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}] = 0,\ [\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{5}] = 0\,.$$

Aus den Plücker-Relationen

$$\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{3}),(\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{7})} = -[\mathbf{0}, \mathbf{3}, 4][\mathbf{0}, \mathbf{6}, \mathbf{7}] + [\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}][\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{7}] - [\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{7}][\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{6}] = 0,$$
$$\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{3}),(\mathbf{0},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{8})} = -[\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{5}][\mathbf{0}, \mathbf{6}, \mathbf{8}] + [\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}][\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{8}] - [\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{8}][\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{6}] = 0$$

folgt mit Werten $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in k^*$

$$[\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{7}]^2 = \lambda[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{6}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3}] + \lambda'[\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}][\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{8}] = 0,$$
$$[\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{8}]^2 = \mu[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}] + \mu'[\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}][\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{7}] = 0.$$

Aus den Relationen $\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{6},\mathbf{8})} = 0$, $\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{6},\mathbf{7})} = 0$ und $\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{7},\mathbf{8})} = 0$ folgt mit entsprechenden nichttrivialen Skalaren

$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{6}]^2 = \lambda[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}] + \lambda'[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{8}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7}]\ ,$$
$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7}]^2 = \mu[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3}] + \mu'[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{6}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{8}]\ ,$$
$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{8}]^2 = \nu[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{5}] + \nu'[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7}][\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{6}]\ ,$$

d. h. wegen $[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}] = 0$ gilt

$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{6}] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7}] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{8}] = 0 \quad .$$

Aus $\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{6})} = 0$ folgt

$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{6}]^2 = \lambda[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3}][\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{7}] + \lambda'[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}][\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}] = 0,$$

d. h. alle Koordinaten $[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{6}],[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{7}],[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{8}]$ sind gleich Null. Außerdem gilt nun noch wegen $\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{4}),(\mathbf{1},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{8})}=0$ und $\tilde{P}_{(\mathbf{0},\mathbf{5}),(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{7},\mathbf{8})}=0$

$$[\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{8}]^2=\lambda[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{4}][\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{6}]+\lambda'[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{8}][\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{5}]+\lambda''[\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{7}][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{8}]=0,$$
$$[\mathbf{0},\mathbf{5},\mathbf{7}]^2=\lambda[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{4}][\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{6}]+\lambda'[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{8}][\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{5}]+\lambda''[\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{7}][\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{8}]=0.$$

Es sind also die Koordinaten aller Repräsentanten und somit alle Koordinaten gleich Null, ein Widerspruch. □

Daraus folgt sofort

Bemerkung 7.6.

$$A \text{ zerfällt} \implies q(\sigma_0,\sigma,\tau)\in W(\sigma_0,\sigma,\tau) \text{ oder } q(\sigma_0,\tau,\sigma)\in W(\sigma_0,\tau,\sigma).$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich, wenn man die Vertauschbarkeit

$$G=\langle\sigma\rangle\times\langle\tau\rangle=\langle\tau\rangle\times\langle\sigma\rangle$$

beachtet. □

Insbesondere erhält man eine Schlußrichtung des bekannten Normkriteriums:[96]

Bemerkung 7.7.

$$A \text{ zerfällt} \implies a\in N_{k(\beta)/k} \text{ mit } \beta^3=b\ .$$

Beweis. Ist $\beta\in k$, so ist die Aussage trivial. Mit $\sigma_0:=(0,0)=0$, $\sigma:=(1,0)=1$ und $\tau:=(0,1)=3$ ist

$$\begin{aligned} q(\sigma_0,\sigma,\tau)&=\frac{a^2}{b}\ ,\\ W(\sigma_0,\sigma,\tau)&=N_{k(\alpha)/k}(k(\alpha)^*) \quad \text{mit } \alpha^3=a\ ,\\ q(\sigma_0,\tau,\sigma)&=\frac{b^2}{a}\ ,\\ W(\sigma_0,\tau,\sigma)&=N_{k(\beta)/k}(k(\beta)^*)\ . \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun wegen

$$b\in N_{k(\alpha)/k}(k(\alpha)^*) \iff a\in N_{k(\beta)/k}(k(\beta)^*)\ .$$

□

[96] Siehe Satz 6.4 iii).

7.3 Konstruktion von Idealen

Als nächstes Ziel soll die andere Schlußrichtung des Normkriteriums (Satz 6.4 iii)) mit diesen Methoden bewiesen werden. Betrachte dazu die Umkehrung der Plücker-Einbettung aus Abschnitt 2.4 (siehe Beispiel 2.4). Durch geeignete Anordnung der Zeilen[97] und unter Verwendung der Ersetzungsrelationen erhält man die Abbildung

$$P^*_{\overline{N}} : V_k(9,3) \cap U_{\overline{N}} \longrightarrow \mathrm{St}_{9,3}\,\overline{k}\,;\; p = \sum_M p_M e_M \longmapsto a$$

mit

$$a = \frac{1}{[N]^3} \left(\begin{array}{ccc} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & \\ 0 & 0 & [N] \\ \hline [\mathbf{123}] & -[\mathbf{023}] & [\mathbf{013}] \\ [\mathbf{124}] & -[\mathbf{024}] & [\mathbf{014}] \\ [\mathbf{125}] & -[\mathbf{025}] & [\mathbf{015}] \\ \hline [\mathbf{126}] & -[\mathbf{026}] & [\mathbf{016}] \\ [\mathbf{127}] & -[\mathbf{027}] & [\mathbf{017}] \\ [\mathbf{128}] & -[\mathbf{028}] & [\mathbf{018}] \end{array} \right) .$$

Betrachtet man die Einschränkung von $P^*_{\overline{N}}$ auf die Brauer-Severi-Varietät $V_A \subseteq V_k(9,3)$, verknüpft mit der Abbildung $\mathrm{St}_{9,3}\,k \longrightarrow BS_A; a \longmapsto \langle a \rangle$, so ist das Bild unter dieser Abbildung invariant unter der Operation von A, und es können die Ersetzungsrelationen angewendet werden. Man erhält

$$\begin{array}{rccc} \hat{P}: & V_A & \longrightarrow & BS_A \\ & p = \sum_M p_M e_M & \longmapsto & \langle a \rangle \end{array}$$

[97]Nämlich in der Reihenfolge $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{8}$.

mit

$$a = \left(\begin{array}{ccc} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & \\ 0 & 0 & [N] \\ \hline \frac{s^\circ_\sigma(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{015}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{014})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{014}] & [\mathbf{013}] \\ \frac{s^\circ_\sigma(\mathbf{013})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{013}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{015}] & [\mathbf{014}] \\ \frac{s^\circ_\sigma(\mathbf{014})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{014}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{013})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{013}] & [\mathbf{015}] \\ \hline \frac{s^\circ_\sigma(\mathbf{018})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{018}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{017})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{017}] & [\mathbf{016}] \\ \frac{s^\circ_\sigma(\mathbf{016})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{016}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{018})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{018}] & [\mathbf{017}] \\ \frac{s^\circ_\sigma(\mathbf{017})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{017}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{016})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{016}] & [\mathbf{018}] \end{array} \right) .$$

Da $\langle a \rangle \in \mathrm{BS}_A$, muß gelten

$$\det a_{\mathbf{016}} = \frac{\mathrm{Nred}\, e_\tau}{s^\circ_\tau(\mathbf{016})} \det a_{\mathbf{034}} \ ,$$
$$\det a_{\mathbf{017}} = \frac{\mathrm{Nred}\, e_\tau}{s^\circ_\tau(\mathbf{017})} \det a_{\mathbf{134}} \ ,$$
$$\det a_{\mathbf{018}} = \frac{\mathrm{Nred}\, e_\tau}{s^\circ_\tau(\mathbf{018})} \det a_{\mathbf{234}} \ .$$

Daraus folgt

$$[\mathbf{016}] = \frac{1}{[N]} \det \begin{pmatrix} \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{014})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{014}] & [\mathbf{013}] \\ \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{015}] & [\mathbf{014}] \end{pmatrix} ,$$

$$[\mathbf{017}] = \frac{1}{[N]} \det \begin{pmatrix} \frac{s^\circ_{\sigma}(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma}}[\mathbf{015}] & [\mathbf{013}] \\ \frac{s^\circ_{\sigma}(\mathbf{013})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma}}[\mathbf{013}] & [\mathbf{014}] \end{pmatrix} ,$$

$$[\mathbf{018}] = \frac{1}{[N]} \det \begin{pmatrix} \frac{s^\circ_{\sigma}(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma}}[\mathbf{015}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{014})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{014}] \\ \frac{s^\circ_{\sigma}(\mathbf{013})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma}}[\mathbf{013}] & \frac{s^\circ_{\sigma^2}(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_{\sigma^2}}[\mathbf{015}] \end{pmatrix} .$$

Ist also ein Punkt p aus V_A mit $p_{\overline{N}} \neq 0$ vorgegeben, so reichen die vier Koordinaten $p_{\overline{N}}$, $p_{\overline{N}_0}$, $p_{\overline{N}_1}$ und $p_{\overline{N}_2}$ aus, um eine Basis des Urbildes anzugeben. Sind die vier Werte beliebig mit $p_{\overline{N}} \neq 0$ vorgegeben, so muß ein Urbild $\langle a \rangle$ in BS_A notwendig eine Basis dieser Form haben, allerdings muß es nicht immer eines geben. Daß eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Urbildes durch $N(\sigma_0, \sigma, \tau) = 0$ gegeben ist, zeigt

Proposition 7.8. *Es gibt einen über k definierten Morphismus*

$$\begin{array}{rccc} \Theta^* : & ZN(\sigma_0,\sigma,\tau) \cap U_0 & \longrightarrow & V_A \cap U_{\overline{N}} \ , \\ & (p_{\overline{N}} : p_{\overline{N}_0} : p_{\overline{N}_1} : p_{\overline{N}_2}) & \longmapsto & P(\langle a \rangle) \end{array}$$

wobei a die oben beschriebene Matrix aus Termen in $[N], [N_0], [N_1]$ und $[N_2]$ ist und $U_0 := \{(y : y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbf{P}^3 | y \neq 0\}$, der invers zu dem Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & V_A \cap U_{\overline{N}} & \longrightarrow & ZN(\sigma_0,\sigma,\tau) \cap U_0 \\ & \overline{k}^* \sum p_M e_M & \longmapsto & (p_{\overline{N}} : p_{\overline{N}_0} : p_{\overline{N}_1} : p_{\overline{N}_2}) \end{array}$$

ist.

Beweis. Sei $p = (p_{\overline{N}} : p_{\overline{N}_0} : p_{\overline{N}_1} : p_{\overline{N}_2}) \in ZN(\sigma_0,\sigma,\tau) \cap U_{\overline{N}}$ und a oben beschriebene Matrix. Bezeichne die Spalten von a mit a_0, a_1 und a_2. Für die Operation mit e_σ gilt

$$\begin{aligned} e_\sigma a_0 &= s_{\sigma,0} a_1 \ , \\ e_\sigma a_1 &= s_{\sigma,1} a_2 \ , \\ e_\sigma a_2 &= s_{\sigma,2} a_0 \ , \end{aligned}$$

wie man leicht nachrechnet, z. B.

$$e_\sigma a_0 = e_\sigma \left(\begin{array}{c} [N] \\ 0 \\ 0 \\ \hline \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{015}] \\ \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{013})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{013}] \\ \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{014})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{014}] \\ \hline \vdots \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ s_{\sigma,\mathbf{0}}[N] \\ 0 \\ \hline s_{\sigma,\mathbf{5}} \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{014})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{014}] \\ s_{\sigma,\mathbf{3}} \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{015})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{015}] \\ s_{\sigma,\mathbf{4}} \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{013})}{\mathrm{Nred}\, e_\sigma}[\mathbf{013}] \\ \hline \vdots \end{array} \right) = s_{\sigma,\mathbf{0}} a_1 \ ,$$

da

$$s_{\sigma,5}\frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{014})}{\operatorname{Nred} e_\sigma} = \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{012})s_{\sigma,\mathbf{5}}}{\operatorname{Nred} e_\sigma}\frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{014})}{\operatorname{Nred} e_\sigma} = \frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{125})s_{\sigma,\mathbf{0}}}{\operatorname{Nred} e_\sigma}\frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{014})}{\operatorname{Nred} e_\sigma} =$$

$$= \frac{s_\sigma^\circ(\sigma(\mathbf{014}))s_{\sigma,\mathbf{0}}}{\operatorname{Nred} e_\sigma}\frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{014})}{\operatorname{Nred} e_\sigma} = \frac{s_{\sigma^2}^\circ(\mathbf{014})}{\operatorname{Nred} e_{\sigma^2}}$$

und entsprechend $s_{\sigma,3}\frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{015})}{\operatorname{Nred} e_\sigma} = \frac{s_{\sigma^2}^\circ(\mathbf{015})}{\operatorname{Nred} e_{\sigma^2}}$ bzw. $s_{\sigma,4}\frac{s_\sigma^\circ(\mathbf{013})}{\operatorname{Nred} e_\sigma} = \frac{s_{\sigma^2}^\circ(\mathbf{013})}{\operatorname{Nred} e_{\sigma^2}}$.

Die Invarianz unter e_τ wird simultan für alle drei Spalten untersucht. Gesucht ist also eine Matrix $c \in \operatorname{Mat}_3 k$, so daß

$$e_\tau a = ac$$

gilt. Die Operation von e_τ bewirkt eine Verschiebung der Zeilen $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$ auf die Zeilen $\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}$ usw. zusammen mit einer Multiplikation eines Skalars. Es können also die Blöcke $a^{(0)} := a_{\mathbf{012}}$, $a^{(1)} := a_{\mathbf{345}}$ und $a^{(2)} := a_{\mathbf{678}}$ getrennt untersucht werden. Die Operation von e_τ läßt sich so ausdrücken[98]

$$(e_\tau a)^{(i+1)} = S_i a^{(i)} \quad \text{mit } S_i := \begin{pmatrix} s_{\tau,\sigma_0\tau^i} & 0 & 0 \\ 0 & s_{\tau,\sigma_0\sigma\tau^i} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\tau,\sigma_0\sigma^2\tau^i} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix c muß also für alle $i = 0, 1, 2$ die Gleichung

$$a^{(i+1)}c = S_i a^{(i)}$$

erfüllen. Für $i = 0$ erhält man notwendig $c^{-1} = {a^{(0)}}^{-1} S_0^{-1} a^{(1)}$. Es müssen also die Gleichungen

$$a^{(2)} = S_1 a^{(1)} c^{-1} \quad \text{und} \quad a^{(0)} = S_2 a^{(2)} c^{-1}$$

verifiziert werden.[99] Dies ist zwar aufwendig, aber straightforward, so daß diese Rechnung hier ausgelassen wird. Die Verträglichkeit

$$\Theta\Theta^* = 1$$

ist sofort zu sehen. Die Überlegungen vor Proposition 7.8 ergeben die Eindeutigkeit des Ideals $\langle a \rangle$, d. h.

$$\Theta^*\Theta = 1 .$$

□

[98] Dabei soll die Addition $i + 1$ modulo 3 gerechnet werden.

[99] Tatsächlich hätte man auch den Matrixbestandteil $a^{(2)}$ durch die erste Gleichung definieren können, so daß nur $a^{(0)} = S_2 S_1 a^{(1)} c^{-2}$ zu zeigen wäre. So sieht man aber, daß das Ideal $\langle a \rangle$ durch die Angabe von $p_{\overline{N}}, p_{\overline{N}_0}, p_{\overline{N}_1}$ und $p_{\overline{N}_2}$ eindeutig bestimmt ist.

7.4 Brauer-Severi-Varietäten

Faßt man die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen, so ergibt sich

Satz 7.9. *Sei A wie in Abschnitt 6.4 eine Symbolalgebra vom Grad 3 mit $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \langle\sigma\rangle \times \langle\tau\rangle$ und $\sigma_0 \in G$. Dann sind die Brauer-Severi-Varietät $V_{A,1}$ und die Normvarietät $ZN(\sigma_0, \sigma, \tau)$ birational äquivalent.*

Aus dieser Beziehung folgt die Isomorphie der Funktionenkörper.

Definition. Ist V eine Brauer-Severi-Varietät, so heißt der Funktionenkörper $k(V)$ der *Brauerkörper* von V.

Korollar 7.10.

$$k(V) \cong_k \mathrm{Quot}\Big(k[y, y_0, y_1, y_2]/\big(N(\sigma_0, \sigma, \tau)\big)\Big)\ .$$

Kapitel 8

Brauer-Severi-Varietäten und Normrelationen

Die Ergebnisse des vorigen Kapitels für Symbolalgebren vom Grad 3 werden in diesem und dem nächsten Kapitel auf allgemeinere Situationen übertragen. Während die Konstruktion von Idealen und der dadurch induzierte Morphismus im Prinzip übernommen werden kann, kann man das Verfahren, Normrelationen unter den Koordinaten von Punkten der Brauer-Severi-Varietät zu beweisen, nicht direkt übertragen. Der Schlüssel dafür ist eine geeignete Verallgemeinerung von Plücker-Relationen, die im ersten Abschnitt entwickelt wird. Um die gewünschten Normrelationen zu erhalten, wird darauf ein Satz angewendet (Satz 8.10), der im zweiten Abschnitt bewiesen wird. Im dritten folgt dann das Hauptergebnis dieses Kapitels (Satz 8.11), das eine Verbindung zwischen der reduzierten Norm der Algebra und der Norm einer kommutativen Unteralgebra herstellt.

8.1 Verallgemeinerte Plücker-Relationen

Um die Ergebnisse des vorigen Kapitels zu verallgemeinern, bieten sich folgende Überlegungen an: Der Teil des Beweises von Satz 2.12, der zeigt, daß alle Punkte $\overline{k}^*w$ mit zerlegbarem w die Plücker-Relationen erfüllen, kann für verschränkte Gruppenalgebren auch so formuliert werden:
Sei $A = (G, s)_k$ eine verschränkte Gruppenalgebra wie in Abschnitt 5.3, nicht unbedingt zentraleinfach, und $d \in \mathbb{N}$ mit $0 < d < n$. Sei $w = \wedge b$ mit $b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$. Definiere für $M \in \mathcal{M}_{d-1,G}$ Vektoren

$$b^M := \sum_{\sigma \in G} \det b_{M+\sigma} e_\sigma.$$

Im Beweis wird nun $b^M \in \langle b \rangle$ gezeigt. Daraus kann man direkt folgern, daß

$$b^M \wedge (\wedge b) = \sum_{M' \in \mathcal{M}_{d+1,G}} P_{M,M'}(\wedge b) e_{M'} = 0$$

ist. Entwickelt man die Determinante der Matrix $(b|b^M)_{M'}$ mit $M' \in \mathcal{M}_{d+1}$ nach der letzten Spalte, so stellt man fest, daß

$$\det(b|b^M)_{M'} = \sum_{j=0}^{d} (-1)^{j+d} \det b_{M+i_j} \det b_{M'-i_j} = (-1)^d P_{M,M'}(\wedge b)$$

gilt, d. h. alle Plücker-Relationen lassen sich für zerlegbare Vektoren als Determinanten solcher (d+1)×(d+1)-Matrizen schreiben. Im Beispiel „$d = 3$“ aus Abschnitt 6.4 schreibt sich etwa die Plücker-Relation $P_{01,0235}(\wedge b)$ als

$$P_{01,0235}(\wedge b) = -\det \left(\begin{array}{ccc|c} b_{01} & b_{02} & b_{03} & \det b_{010} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \det b_{012} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \det b_{013} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & \det b_{015} \end{array} \right)$$

$$= \det b_{012} \det b_{035} - \det b_{013} \det b_{025} + \det b_{015} \det b_{023}.$$

Der Beweisschritt von oben kann nun folgendermaßen aussehen: Wegen $b^M \in \langle b \rangle$ ist die Determinante $\det(b|b^M)_{M'}$ gleich Null für alle $M' \in \mathcal{M}_{d+1}$ und deshalb sind die Plücker-Relationen erfüllt.
Im Beispiel „$d = 2$“ (d. h. $A = \left(\frac{a,b}{k,-1}\right)$ ist eine Quaternionenalgebra) sieht die Matrix $(b|b^M)_{M'}$ mit $M = (0)$ und $M' = (1, 2, 3)$ folgendermaßen aus:

$$B := \left(\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & \det b_{01} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \det b_{02} \\ b_{31} & b_{32} & \det b_{03} \end{array} \right) .$$

Sei $\overline{k}^* \wedge b \in V_{A,1}$. Entwickelt man die Determinante von B nach der letzten Spalte und ersetzt die Koordinaten $\det b_M$ durch ihre Repräsentanten,[100] so stellt man fest, daß dabei die „Bestandteile“ einer Normrelation auftauchen:

$$\det b_{01} \det b_{23} = -b(\det b_{23})^2$$

[100]Siehe das Beispiel auf Seite 108.

und[101]

$$
\begin{aligned}
&- \det b_{02} \det b_{13} + \det b_{03} \det b_{12} \\
&= \det \begin{pmatrix} \det b_{12} & \det b_{02} \\ \det b_{13} & \det b_{03} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \det b_{12} & a \det b_{13} \\ \det b_{13} & \det b_{12} \end{pmatrix} = N_{K/k}(\underline{b})
\end{aligned}
$$

mit[102] $K =: k(\alpha)$, $\alpha^2 = a$ und $\underline{b} = \det b_{12} + \alpha \det b_{13}$, so daß $(K : k) = 2$. Da keine weiteren Summanden in der Determinante auftreten, erhält man aus $\det B = 0$ direkt

$$N_{K/k}(\underline{b}) = b(\det b_{23})^2.$$

Um dieses Vorgehen auf den Fall „$d = 3$“ anzuwenden, braucht man zunächst eine geeignete Matrix B. Diese könnte wie folgt aussehen (Details erklären sich später):

$$
B := \left(\begin{array}{ccc|cc}
b_{01} & b_{02} & b_{03} & a \det b_{012} & 0 \\
b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & a \det b_{012} \\
\hline
b_{31} & b_{32} & b_{33} & a \det b_{015} & a \det b_{014} \\
b_{41} & b_{42} & b_{43} & \det b_{013} & a \det b_{015} \\
b_{51} & b_{52} & b_{53} & \det b_{014} & \det b_{013}
\end{array}\right).
$$

Wie sich zeigen wird, sind die letzten beiden Spalten von den ersten linear abhängig, die Determinante von B ist also gleich Null. Sie läßt sich durch Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes (siehe Satz 8.4 mit $N = (4, 5)$) und der Ersetzungen

$$\det b_{\sigma M} = \frac{s_\sigma(M)}{\operatorname{Nred} e_\sigma} \det b_M$$

folgendermaßen schreiben:

$$\det B = S_1 + S_2 + S_3$$

mit

$$S_1 = \det b_{345}\; a^2 (\det b_{012})^2 = a^2 b^{-1} (\det b_{012})^3$$

[101]Hier wie im folgenden wird ausgenutzt, daß sich die Norm einer Körpererweiterung auch als Determinante der zu der Körpererweiterung gehörenden regulären Darstellung schreiben läßt, vgl. z. B. Lang [28], p. 288.

[102]Hier muß vorausgesetzt werden, daß eine solche Körpererweiterung existiert.

und

$$S_2 = \begin{cases} \det b_{015} \det \begin{pmatrix} a \det b_{015} & a \det b_{014} \\ \det b_{013} & a \det b_{015} \end{pmatrix} \\ - \det b_{014} \det \begin{pmatrix} a \det b_{015} & a \det b_{014} \\ \det b_{014} & \det b_{013} \end{pmatrix} \\ + \det b_{013} \det \begin{pmatrix} \det b_{013} & a \det b_{015} \\ \det b_{014} & \det b_{013} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \det b_{013} & a \det b_{015} & a \det b_{014} \\ \det b_{014} & \det b_{013} & a \det b_{015} \\ \det b_{015} & \det b_{014} & \det b_{013} \end{pmatrix} = N_{K/k}(\underline{b}),$$

wobei[103] $K := k(\alpha)$ mit $\alpha^3 = a$, $\underline{b} = \det b_{013} + \alpha \det b_{014} + \alpha^2 \det b_{015}$ und $(K : k) = 3$. Außerdem ist

$$S_3 = \begin{cases} -a \det b_{012} a \det b_{014} \det b_{145} - a \det b_{012} \det b_{014} \det b_{034} \\ +a \det b_{012} a \det b_{015} \det b_{135} - a \det b_{012} a \det b_{015} \det b_{045} \\ +a \det b_{012} \det b_{013} \det b_{134} + a \det b_{012} \det b_{013} \det b_{035} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a\xi \det b_{012} a \det b_{014} \det b_{016} - a\xi \det b_{012} \det b_{014} \det b_{016} \\ -a^2 \det b_{012} \det b_{015} \det b_{018} - a^2 \det b_{012} \det b_{015} \det b_{018} \\ -a\xi^2 \det b_{012} \det b_{013} \det b_{017} - a\xi^2 \det b_{012} \det b_{013} \det b_{017} \end{cases}.$$

Mit S_1 und S_2 hat man also wieder die benötigten „Bestandteile“ einer Normrelation. Ein Vergleich mit dem Ergebnis des letzten Abschnitts (vgl. Seite 113) zeigt, daß sogar der Faktor $a^2 b^{-1}$ „richtig“ ist. Allerdings kann die Normrelation nicht direkt aus der Trivialität der Determinante von B erhalten werden. Zum einen hätte S_1 nicht das zu erwartende Vorzeichen, zum anderen ist S_3 nicht gleich Null.

Wünschenswert sind also zwei Dinge: Zunächst eine allgemeine Beschreibung von Matrizen B, so daß sich in analoger Weise S_1 und S_2 ergeben, d. h. eine d-te Potenz einer Koordinate (evt. mit einem Faktor versehen) und die Norm eines Elements, das sich aus weiteren Koordinaten zusammensetzt. Zudem wird ein Satz benötigt, der S_1 und S_2 in geeigneter Weise in Beziehung setzt. Solch ein Satz wird im nächsten Abschnitt bewiesen (Satz 8.10).
Zunächst wird eine Verallgemeinerung der Plücker-Relationen und der oben verwendeten Matrizen definiert.

Sei $A = (G, s)_k$ eine n-dimensionale verschränkte Gruppenalgebra wie oben mit Basis $(e_\sigma \mid \sigma \in G)$ und θ die dazugehörige linksreguläre Darstellung. Sei

[103] Auch hier muß vorausgesetzt werden, daß eine solche Körpererweiterung existiert.

$d \in \mathbb{N}$ mit $d < n$ und $b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$. Definiere für $\sigma \in G$ und $M \in \mathcal{M}^{\circ}_{d-1,G}$ Vektoren[104]

$$b^{M,\sigma} := \sum_{\tau \in G} s_{\sigma^{-1},\sigma\tau} \det b_{M+\sigma\tau} e_\tau .$$

Lemma 8.1. *Für alle $\sigma \in G$ und $M \in \mathcal{M}^{\circ}_{d-1}$ gilt*

$$\langle b \rangle \in V_{\theta/k}(n,d) \quad \Longrightarrow \quad b^{M,\sigma} \in \langle b \rangle .$$

Beweis. Identifiziere die Spalten b_i von $b = (b_1|\ldots|b_d)$ mit $b_i = \sum_{\tau \in G} b_{\tau,i} e_\tau$ aus A. Linksmultiplikation mit $e_{\sigma^{-1}}$ liefert

$$\begin{aligned} e_{\sigma^{-1}} b_i &= \sum_{\tau \in G} b_{\tau,i} e_{\sigma^{-1}} e_\tau = \sum_{\tau \in G} s_{\sigma^{-1},\tau} b_{\tau,i} e_{\sigma^{-1}\tau} \qquad (*)\\ &= \sum_{\sigma\tau \in G} s_{\sigma^{-1},\sigma\tau} b_{\sigma\tau,i} e_\tau . \end{aligned}$$

Damit erhält man[105]

$$\begin{aligned} b^{M,\sigma} &= \sum_{\tau \in G} s_{\sigma^{-1},\sigma\tau} \det b_{M+\sigma\tau} e_\tau \\ &= \sum_{\tau \in G} \sum_{i=1}^{d} (-1)^{d+i} s_{\sigma^{-1},\sigma\tau} b_{\sigma\tau,i} \det b_M^{-(i)} e_\tau \\ &= \sum_{i=1}^{d} (-1)^{d+i} \det b_M^{-(i)} \sum_{\tau \in G} s_{\sigma^{-1},\sigma\tau} b_{\sigma\tau,i} e_\tau \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{d} (-1)^{d+i} \det b_M^{-(i)} \underbrace{e_{\sigma^{-1}} b_i}_{\in \langle b \rangle} , \end{aligned}$$

denn mit der Identifizierung von b_i mit $b_i = \sum_{\tau \in G} b_{\tau,i} e_\tau$ folgt aus $\langle b \rangle \in V_{\theta/k}(n,d)$, daß $e_{\sigma^{-1}} b_i = \theta(e_{\sigma^{-1}}) b_i \in \langle b \rangle$. □

Definition (Verallgemeinerte Plücker-Relationen).
Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \le m \le n-d$ und $M' \in \mathcal{M}^{\circ}_{d+m}$. Seien $M_i \in \mathcal{M}^{\circ}_{d-1}$ und $\tau_i \in G$ für alle $1 \le i \le m$. Relationen der Form

$$P(M'; M_1, \tau_1, \ldots, M_m, \tau_m)(x) = 0$$

[104] Es sei hier noch einmal an die Definitionen auf Seite 11 erinnert.

[105] $b^{-(i)}$ bezeichnet die Matrix b ohne die i-te Spalte.

mit

$$P(M'; M_1, \tau_1, \ldots, M_m, \tau_m)(x) := \det(x|x^{M_1,\tau_1}| \ldots |x^{M_m,\tau_m})_{M'},$$

wobei x eine generische n×d-Matrix ist, heißen *verallgemeinerte Plücker-Relationen.*[106]

Bemerkung 8.2. Ist $m = 1$, $M \in \mathcal{M}_{d-1}$ und $M' \in \mathcal{M}_{d+1}$, so ist

$$P(M'; M, 1_G)(b) = (-1)^d P_{M,M'}(\wedge b)$$

für alle $b \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$.

Mit Lemma 8.1 folgt

Proposition 8.3. *Ist $A = (G, s)_k$ eine n-dimensionale verschränkte Gruppenalgebra, $\theta : A \longrightarrow \mathrm{Mat}_n\, k$ eine linksreguläre Darstellung, $d, m \in \mathbb{N}$ mit $d < n$ und $m \leq n - d$, so gilt für alle $\langle b \rangle \in \mathrm{Grass}_{\theta/k}(r, d)$*

$$P(M'; M_1, \tau_1, \ldots, M_m, \tau_m)(b) = 0$$

für alle $M' \in \mathcal{M}^\circ_{d+m}$, $M_i \in \mathcal{M}^\circ_{d-1}$ und $\tau_i \in G$.

Die hier auftretenden Matrizen sind von der gesuchten Form. Die Matrix B im Beispiel auf Seite 135 etwa ist

$$\left(x|x^{(01),-1}|x^{(01),-2}\right)_{01345}.$$

Durch Nachrechnen weiterer Beispiele stellt man fest, daß auf diese Weise stets Bestandteile S_1, S_2 und ein Rest auftreten, so daß nur noch ein Satz benötigt wird, der S_1 und S_2 in geeigneter Weise in Beziehung setzt.

8.2 Summen von Matrixminoren

In diesem Abschnitt wird eine Aussage (Satz 8.10) bewiesen, die eine Beziehung zwischen Matrixbestandteilen der Form S_1 und S_2 herstellt.[107] Dabei treten bestimmte Summen von Minoren einer Matrix auf, für deren Beschreibung sich Methoden und Notationen eignen, wie sie beim Beweis der allgemeinen Form des Entwicklungssatzes von Laplace benutzt werden. Die hier

[106] So definiert sind dies zunächst Relationen zwischen den Matrixeinträgen x_{ij}. Durch geeignetes Ausmultiplizieren erhält man jedoch Relationen zwischen Werten der Form $\det x_M$, so daß man sie auch als Relationen auf $\mathbf{P} \bigwedge^d k^n$ auffassen kann, indem man die Koordinaten zerlegbarer Vektoren $\det x_M$ durch Koordinaten beliebiger Vektoren p_M ersetzt.

[107] Siehe Seite 136.

verwendete Schreibweise lehnt sich an die von Kowalsky (in [27], Seite 91 f.) gebrauchte an.
Seien n und d natürliche Zahlen mit $d < n$. Wie üblich bezeichne $\mathcal{M}^{\circ}_{d,n}$ die Menge der d-Tupel von verschiedenen Elementen aus $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{M}_{d,n}$ die Teilmenge der geordneten d-Tupel[108] und $\mathcal{S}_n$ die symmetrische Gruppe der Ordnung n. Ist $N = (i_1, \dots, i_d) \in \mathcal{M}^{\circ}_{d,n}$ und $\gamma \in \mathcal{S}_n$, so ist

$$\gamma N := (\gamma i_1, \dots, \gamma i_d)$$

wieder in $\mathcal{M}^{\circ}_{d,n}$. $\mathcal{S}_n$ operiert so auf $\mathcal{M}^{\circ}_{d,n}$. Ist N geordnet, so ist γN im allgemeinen nicht geordnet.[109] Durch $\gamma : N \longmapsto \overline{\gamma N}$ operiert $\mathcal{S}_n$ auf $\mathcal{M}_{d,n}$. Sei $N \in \mathcal{M}_{d,n}$. Definiere

$$\Gamma_n(N) := \Big\{ \gamma \in \mathcal{S}_n \;\Big|\; \gamma N = \overline{\gamma N} \wedge \gamma(-N) = \overline{\gamma(-N)} \Big\}.$$

Dabei bezeichne

$$-N := (1, \dots, n) - N.$$

Sei $\gamma \in \Gamma_n(N)$. Dann ist γN geordnet, d.h. $\gamma N \in \mathcal{M}_{d,n}$, und

$$\operatorname{sign} \gamma = (-1)^{\Sigma N + \Sigma \gamma N}\ , \text{ wobei } \Sigma N := \sum_{i \in N} i.$$

Definiere

$$\begin{aligned} \Pi_n(N, \gamma) :=& \Big\{ \sigma \in \mathcal{S}_n \;\Big|\; \sigma(\gamma i) = \gamma i \ \forall\ i \in -N \Big\}, \\ \Pi^*_n(N, \gamma) :=& \Pi_n(-N, \gamma) \\ =& \Big\{ \sigma \in \mathcal{S}_n \;\Big|\; \sigma(\gamma i) = \gamma i \ \forall\ i \in N \Big\}. \end{aligned}$$

Ein beliebiges $\pi \in \mathcal{S}_n$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$\pi = \sigma \tau \gamma \text{ mit } \gamma \in \Gamma_n(N) \text{ und } \tau \in \Pi^*_n(N, \gamma), \sigma \in \Pi_n(N, \gamma).$$

Ist nämlich ein $\pi \in \mathcal{S}_n$ vorgegeben, so bestimmt man die geordneten Bilder von N und $-N$, d.h. $\overline{\pi N}$ bzw. $\overline{\pi(-N)}$. Dadurch ist γ eindeutig festgelegt.

[108] Siehe zu den Definitionen der Mengen und vor allem der für deren Elemente definierten Verknüpfungen die Definition auf Seite 11.

[109] Diese Notation, bei der ein Element einer symmetrischen Gruppe auf N wirkt, ist nicht zu verwechseln mit der Operation der Gruppe G auf $\mathcal{M}_{d,G}$.

Als τ und σ werden die Permutationen gewählt, die $\overline{\pi N}$ in πN bzw. $\overline{\pi(-N)}$ in $\pi(-N)$ überführen und alle anderen Elemente festlassen. Man sieht so auch, daß folgende bijektive Korrespondenzen bestehen

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(N) &\longrightarrow \mathcal{M}_{d,n}; \quad \gamma \longmapsto \gamma N,\\
\Pi_n(N,\gamma) &\longrightarrow \mathcal{S}_d; \quad \sigma \longmapsto \sigma_{|N},\\
\Pi_n^*(N,\gamma) &\longrightarrow \mathcal{S}_{n-d}; \quad \tau \longmapsto \tau_{|-N}.
\end{aligned}$$

Zusammen erhält man die Bijektion

$$\mathcal{S}_n \longrightarrow \Gamma_n(N) \times \mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_{n-d}\ . \tag{$*$}$$

Ein Element $\gamma \in \Gamma_n(N)$ ist also schon durch Angabe eines Bildelements $\gamma N = N' \in \mathcal{M}_{d,n}$ eindeutig bestimmt. Ist B eine Matrix, so bezeichne wie gewohnt mit B^N die Matrix mit den durch N ausgewählten Spalten und mit B_N die Matrix mit den durch N ausgewählten Zeilen. Mit diesen Definitionen folgt nun leicht die allgemeine Form des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

Satz 8.4 (Laplacescher Entwicklungssatz). *Sei $B \in \operatorname{Mat}_n k$ und $N \in \mathcal{M}_{d,n}$. Dann gilt*

$$\det B = \sum_{\gamma \in \Gamma_n(N)} \operatorname{sign} \gamma \det B^N_{\gamma N} \det B^{-N}_{-\gamma N}.$$

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{sign} \sigma = \operatorname{sign} \sigma_{|N} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{sign} \tau = \operatorname{sign} \tau_{|-N}.$$

Damit folgt mit $(*)$:

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign} \pi B_{\pi 1,1} \dots B_{\pi n,n}\\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_n(N)} \operatorname{sign} \gamma \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in \Pi_n(N,\gamma)} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i \in N} B_{\sigma\gamma i,i} \right)}_{= \det B^N_{\gamma N}} \underbrace{\left(\sum_{\tau \in \Pi_n^*(N,\gamma)} \operatorname{sign} \tau \prod_{i \in -N} B_{\tau\gamma i,i} \right)}_{= \det B^{-N}_{-\gamma N}} .
\end{aligned}$$

□

Sei $B = (B_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_n k$ mit $\operatorname{Rang} B = d$. Sei $N \in \mathcal{M}_{d,n}$ so gewählt, daß

$$B^N \in \operatorname{St}_{n,d} k,$$

d.h. daß die Menge der durch N indizierten Vektoren $\left\{B^i \mid i \in N\right\}$ linear unabhängig ist. Sei $m := n - d$, $\nu \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \nu \leq n$, $M \in \mathcal{M}_{\nu,n}$ und $j \in -N$. Betrachte nun folgende Summe

$$S := \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \overline{\pi(-N-j)} \subseteq M}} \operatorname{sign} \pi B_{\pi 1,1} \ldots B_{\pi n,n}.$$

Es ist $S = 0$, da

$$\begin{aligned} S = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_n(N \cup j) \\ \gamma(-N-j) \subseteq M}} \operatorname{sign} \gamma & \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in \Pi_n(N \cup j, \gamma)} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i \in N \cup j} B_{\sigma\gamma i,i} \right)} \left(\sum_{\tau \in \Pi_n^*(N \cup j, \gamma)} \operatorname{sign} \tau \prod_{i \in -N-j} B_{\tau\gamma i,i} \right). \\ & = \det B^{N \cup j}_{\gamma(N \cup j)} = 0, \\ & \text{denn } \operatorname{Rang} B = d \end{aligned}$$

Wegen der disjunkten Zerlegung

$$\begin{aligned} & \left\{\pi \in \mathcal{S}_n \mid \overline{\pi(-N-j)} \subseteq M\right\} = \\ & \left\{\pi \in \mathcal{S}_n \mid \overline{\pi(-N)} \subseteq M\right\} \mathbin{\dot{\cup}} \left\{\pi \in \mathcal{S}_n \mid \overline{\pi(-N-j)} \subseteq M \wedge \pi j \notin M\right\} \end{aligned}$$

läßt sich S folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} S = & \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \overline{\pi(-N)} \subseteq M}} \operatorname{sign} \pi B_{\pi 1,1} \ldots B_{\pi n,n} + \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \overline{\pi(-N-j)} \subseteq M \\ \pi j \notin M}} \operatorname{sign} \pi B_{\pi 1,1} \ldots B_{\pi n,n} \\ = & \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_n(N) \\ \gamma(-N) \subseteq M}} \operatorname{sign} \gamma \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in \Pi_n(N, \gamma)} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i \in N} B_{\sigma\gamma i,i} \right)}_{= \det B^N_{\gamma N}} \underbrace{\left(\sum_{\tau \in \Pi_n^*(N, \gamma)} \operatorname{sign} \tau \prod_{i \in -N} B_{\tau\gamma i,i} \right)}_{= \det B^{-N}_{-\gamma N}} \\ & + \sum_{l \in -M} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n \\ \overline{\pi(-N-j)} \subseteq M \\ \pi j = l}} \operatorname{sign} \pi B_{\pi 1,1} \ldots B_{\pi n,n}. \end{aligned}$$

Wähle für den ersten Summanden die Bezeichnung

$$\Delta(B,N,M) := \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n(N)\\ \gamma(-N)\subseteq M}} \operatorname{sign}\gamma \det B^N_{\gamma N} \det B^{-N}_{-\gamma N}.$$

Der zweite Summand soll nun in ähnlicher Form als Summe von Ausdrücken $\Delta(\tilde{B},\tilde{N},\tilde{M})$ geschrieben werden. Sei dazu für bestimmte Werte $j\in -N$ und $l\in -M$

$$\tilde{B} := B^{(l,j)} \in \operatorname{Mat}_{n-1} k,$$

d. h. die Matrix, die aus B durch Streichung der l-ten Zeile und der j-ten Spalte und durch Umnummerierung hervorgeht, so daß die Zeilen und Spalten von $\tilde{B}$ durch die Zahlen $1,\dots,n-1$ indiziert werden. Seien $\tilde{N}\in\mathcal{M}_{d,n-1}$ und $\tilde{M}\in\mathcal{M}_{\nu,n-1}$ so gewählt, daß

$$B^N_M = \tilde{B}^{\tilde{N}}_{\tilde{M}}$$

gilt. Dies ist möglich, da $l\notin M$ und $j\notin N$. Sei jeder Permutation $\pi\in\mathcal{S}_n$ mit $\pi j = l$ eine Permutation $\tilde{\pi}\in\mathcal{S}_{n-1}$ zugeordnet, so daß stets

$$B_{\pi1,1}\dots B_{\pi n,n} = B_{l,j}\,\tilde{B}_{\tilde{\pi}1,1}\dots\tilde{B}_{\tilde{\pi}n-1,n-1}$$

gilt. Durch $\pi\longmapsto\tilde{\pi}$ erhält man eine bijektive Korrespondenz

$$\big\{\pi\in\mathcal{S}_n \mid \overline{\pi(-N-j)}\subseteq M \wedge \pi j = l\big\} \longrightarrow \big\{\tilde{\pi}\in\mathcal{S}_{n-1} \mid \overline{\tilde{\pi}(-\tilde{N})}\subseteq\tilde{M}\big\},$$

und für die Vorzeichen korrespondierender Permutationen gilt

$$\operatorname{sign}\pi = (-1)^{l+j}\operatorname{sign}\tilde{\pi}.$$

Mit diesen Bezeichnungen folgt nun

$$\begin{aligned}&\sum_{l\in -M}\ \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{S}_n\\ \overline{\pi(-N-j)}\subseteq M\\ \pi j = l}} \operatorname{sign}\pi B_{\pi1,1}\dots B_{\pi n,n}\\ &= \sum_{l\in -M}(-1)^{l+j}B_{l,j}\sum_{\substack{\tilde{\pi}\in\mathcal{S}_{n-1}\\ \overline{\tilde{\pi}(-\tilde{N})}\subseteq\tilde{M}}}\operatorname{sign}\tilde{\pi}\tilde{B}_{\tilde{\pi}1,1}\dots\tilde{B}_{\tilde{\pi}n-1,n-1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{l\in -M} (-1)^{l+j} B_{l,j} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_{n-1}(\tilde N)\\ \gamma(-\tilde N)\subseteq \tilde M}} \operatorname{sign}\gamma \underbrace{\left(\sum_{\sigma\in\Pi_{n-1}(\tilde N,\gamma)} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i\in\tilde N} \tilde B_{\sigma\gamma i,i}\right)}_{=\det \tilde B^{\tilde N}_{\gamma\tilde N}}$$

$$\underbrace{\left(\sum_{\tau\in\Pi^*_{n-1}(\tilde N,\gamma)} \operatorname{sign}\tau \prod_{i\in -\tilde N} \tilde B_{\tau\gamma i,i}\right)}_{=\det \tilde B^{-\tilde N}_{-\gamma\tilde N}}$$

$$= \sum_{l\in -M} (-1)^{l+j} B_{l,j} \Delta(\tilde B, \tilde N, \tilde M).$$

Es ergibt sich

Lemma 8.5.

$$\Delta(B,N,M) = -\sum_{l\in -M} (-1)^{l+j} B_{l,j} \Delta(\tilde B, \tilde N, \tilde M).$$

Aus diesem Zusammenhang lassen sich verschiedene Aussagen über Gleichheit bestimmter Summen von Minoren der Matrix B ableiten. Da hier aber auf eine besondere Aussage abgezielt wird, soll der Einfachheit halber eine spezielle Situation angenommen werden.

Sei $B \in \operatorname{Mat}_n k$ mit $\operatorname{Rang} B = d$, so daß $n \le 2d$, und $N \in \mathcal{M}_{d,n}$, so daß $B^N \in \operatorname{St}_{n,d} k$. Sei $M \in \mathcal{M}_{d,n}$. Es wird nun ein Lemma bewiesen, das eine Art Vertauschungssatz für Δ darstellt, d. h. es zeigt, daß dieser Wert von der Anordnung der Zeilen und Spalten der Matrix B bis auf ein Vorzeichen unabhängig ist.

Sei $N_0 \in \mathcal{M}_{d,n}$ beliebig. Seien $\sigma \in \Gamma_n(N_0)$ und $\sigma^* \in \Gamma_n(M)$ definiert durch $\sigma(N_0) = N$ und $\sigma^*(M) = N_0$. Die Abbildungen sind durch diese Angaben eindeutig bestimmt. Dann gilt für beliebiges $\gamma \in \Gamma_n(N)$

$$\hat\gamma := \sigma^*\gamma\sigma \in \Gamma_n(N_0)\ ,$$

und falls $\gamma(-N) \subseteq M$, so ist

$$\hat\gamma(-N_0) \subseteq N_0\ .$$

Sei $\hat B$ die Matrix, die aus B hervorgeht, wenn man die durch M und N indizierten Zeilen bzw. Spalten jeweils an die durch N_0 angegebenen Positionen bringt, ohne die Reihenfolge zu verändern. Dann gilt etwa $\mathrm{B}_M^N = \hat{B}_{N_0}^{N_0}$. Man erhält

$$\begin{aligned}\Delta(B,N,M) &= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n(N)\\ \gamma(-N)\subseteq M}} \operatorname{sign}\gamma \det B_{\gamma N}^N \det B_{-\gamma N}^{-N}\\ &= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n(N)\\ \gamma(-N)\subseteq M}} \operatorname{sign}\gamma \det \hat{B}_{\hat{\gamma}N_0}^{N_0} \det \hat{B}_{-\hat{\gamma}N_0}^{-N_0}\\ &= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n(N_0)\\ \gamma(-N_0)\subseteq N_0}} \underbrace{(\operatorname{sign}\sigma^*)^{-1}\operatorname{sign}\gamma(\operatorname{sign}\sigma)^{-1}}_{=\operatorname{sign}\gamma(-1)^{\Sigma M+\Sigma N_0+\Sigma N+\Sigma N_0}} \det \hat{B}_{\gamma N_0}^{N_0} \det \hat{B}_{-\gamma N_0}^{-N_0}\\ &= (-1)^{\Sigma N+\Sigma M}\Delta(\hat{B},N_0,N_0)\ ,\end{aligned}$$

also

Lemma 8.6.

$$\Delta(B,N,M) = (-1)^{\Sigma N+\Sigma M}\Delta(\hat{B},N_0,N_0)\ .$$

Proposition 8.7. *Sei* $B \in \mathrm{Mat}_n\, k$ *mit* $\mathrm{Rang}\, B = d$*, so daß* $n \le 2d$*, und* $N \in \mathcal{M}_{d,n}$*, so daß* $B^N \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$*. Sei* $M \in \mathcal{M}_{d,n}$ *und* $m := n-d$*. Dann gilt*

$$\Delta(B,N,M) = (-1)^{\Sigma N+\Sigma M+m} \det B_{-M}^{-N} \det B_M^N.$$

Beweis. Sei $d \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Definiere $N_i := (i+1,\ldots,i+d) \in \mathcal{M}_{d,n}$ für $0 \le i \le d$. Beweise die Aussage zunächst nur für den Fall, daß $M = N = N_m$, d. h. für $\Delta(B,N_m,N_m)$ mit $B \in \mathrm{Mat}_n\, k$ und $m = n-d$, so daß $B^{N_m} \in \mathrm{St}_{d,n}\, k$, und zwar (bei festem d) durch Induktion über $m := n-d$ mit $0 \le m \le d$.
„ $m = 0$ ": $\Delta(B,N_m,N_m) = 1 \det B_{N_m}^{N_m}$.
„ $m > 0$ ": Sei $B \in \mathrm{Mat}_n\, k$ mit $m = n-d$ und $B^{N_m} \in \mathrm{St}_{d,n}\, k$. Nach Lemma 8.5 gilt für $j \in -N_m$

$$\begin{aligned}\Delta(B,N_m,N_m) &= -\sum_{l\in -N_m} (-1)^{l+j} B_{l,j}\Delta(\tilde{B},N_{m-1},N_{m-1})\\ &= -\sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+j} B_{l,j}(-1)^{m-1} \det \tilde{B}_{-N_{m-1}}^{-N_{m-1}} \det \tilde{B}_{N_{m-1}}^{N_{m-1}}\\ &= (-1)^m \left(\sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+j} B_{l,j} \det B_{-N_m-l}^{-N_m-j}\right) \det B_{N_m}^{N_m}\\ &= (-1)^m \det B_{-N_m}^{-N_m} \det B_{N_m}^{N_m}\ .\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun mit Lemma 8.6. □

Für $m = d$ ergibt sich aus der Proposition etwa folgende leicht einsehbare Beziehung

Korollar 8.8. *Ist für $d \in \mathbb{N}$*

$$B = (a|b) = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ \hline a_2 & b_2 \end{array}\right)$$

eine $2d \times 2d$-Matrix vom Rang d, sind $a, b \in \operatorname{Mat}_{n,d} k$, so daß die Spalten von a linear unabhängig sind, und $a_i, b_i \in \operatorname{Mat}_d k$, dann gilt

$$\det a_2 \det b_1 = \det a_1 \det b_2.$$

Beweis. Entweder mit Proposition 8.7 oder aus folgender Überlegung: Seien die Spalten von b o. E. linear unabhängig. Dann spannen die Spalten von a und b den selben Unterraum auf, und es gibt eine Transformationsmatrix $c \in \mathrm{GL}_d$ mit $ac = b$. Dann gilt auch $a_i c = b_i$, und die Aussage folgt. □

Diese Aussage ließe sich leicht verallgemeinern, sie ist aber für alles weitere unwichtig und soll nur der Illustration dienen. Der wichtige Fall ist $m = d-1$. Hier ergibt sich folgendes:

Proposition 8.9. *Sei $B \in \operatorname{Mat}_n k$ mit $\operatorname{Rang} B = d$, so daß $n = 2d - 1$, und $N \in \mathcal{M}_{d,n}$, so daß $B^N \in \operatorname{St}_{n,d} k$. Sei $M \in \mathcal{M}_{d,n}$. Dann gilt*

$$\Delta(B, N, M) = (-1)^{\Sigma N + \Sigma M} \det B(N, M)$$

mit

$$\begin{aligned} B(N, M) &:= \left(\left(\det B^N_{-M \cup i} \right)_{i \in M} \middle| B^{-N}_M \right) \\ &:= \begin{pmatrix} \det B^N_{-M,i_1} & B_{i_1 j_1} & \dots & B_{i_1 j_{d-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det B^N_{-M,i_d} & B_{i_d j_1} & \dots & B_{i_d j_{d-1}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $M = (i_1, \dots, i_d)$ und $-N = (j_1, \dots, j_{d-1})$.

Beweis. Sei $N := (1,\ldots,d)$ und $B \in \mathrm{Mat}_n\, k$, so daß $B^N \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(B,N,N) &= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n(N)\\ \gamma(-N)\subseteq N}} \operatorname{sign}\gamma \det B^N_{\gamma N} \det B^{-N}_{-\gamma N} \\
&= \sum_{\substack{l=1\\ \gamma(-N):=N-l\\ \gamma(N)=-N\cup l}}^{d} (-1)^{\Sigma N+(\Sigma-N)+l} \det B^N_{-N\cup l} \det B^{-N}_{N-l} \\
&= -(-1)^{\sum_{i=1}^n i} \sum_{l=1}^{d} (-1)^{l+1} \det B^N_{-N\cup l} \det B^{-N}_{N-l} \\
&= (-1)^{d-1} \det \begin{pmatrix} \det B^N_{-N\cup 1} & B_{1,d+1} & \ldots & B_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det B^N_{-N\cup d} & B_{d,d+1} & \ldots & B_{d,n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Seien nun $N, M \in \mathcal{M}_{d,n}$ beliebig und $B \in \mathrm{Mat}_n\, k$ mit $B^N \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$. Das allgemeine Ergebnis folgt dann mit Lemma 8.6, wobei hier für $(-1)^{\Sigma N+\Sigma M}$ abkürzend ϵ geschrieben wird:

$$\begin{aligned}
\Delta(B,N,M) &= \epsilon\Delta(\hat{B},\hat{N},\hat{N}) \qquad \text{mit } \hat{N} := (1,\ldots,d) \\
&= \epsilon(-1)^{d-1} \det \begin{pmatrix} \det \hat{B}^{\hat{N}}_{-\hat{N}\cup 1} & \hat{B}_{1,d+1} & \ldots & \hat{B}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det \hat{B}^{\hat{N}}_{-\hat{N}\cup d} & \hat{B}_{d,d+1} & \ldots & \hat{B}_{d,n} \end{pmatrix} \\
&= \epsilon(-1)^{d-1} \det \begin{pmatrix} \det B^N_{i_1,(-M)} & B_{i_1,j_1} & \ldots & B_{i_1,j_{d-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det B^N_{i_d,(-M)} & B_{i_d,j_1} & \ldots & B_{i_d,j_{d-1}} \end{pmatrix} \\
&= \epsilon \det \begin{pmatrix} \det B^N_{-M,i_1} & B_{i_1,j_1} & \ldots & B_{i_1,j_{d-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det B^N_{-M,i_d} & B_{i_d,j_1} & \ldots & B_{i_d,j_{d-1}} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{\Sigma N+\Sigma M} \det B(N,M)\ .
\end{aligned}$$

□

Aus dieser Proposition folgt zusammen mit Proposition 8.7 sofort

Satz 8.10. *Sei* $B \in \mathrm{Mat}_n\, k$ *mit* $\mathrm{Rang}\, B = d$*, so daß* $n = 2d-1$*, und* $N \in \mathcal{M}_{d,n}$*, so daß* $B^N \in \mathrm{St}_{n,d}\, k$*. Sei* $M \in \mathcal{M}_{d,n}$*. Dann gilt*

$$\det B(N,M) = (-1)^{d-1} \det B^{-N}_{-M} \det B^N_M .$$

Durch geeignete Wahl einer Matrix B, bei der die im vorigen Abschnitt hergeleitete Form verallgemeinerter Plücker-Relationen benutzt wird, kann dieses Korollar dazu verwendet werden, Normrelationen herzuleiten.

8.3 Normrelationen

An dieser Stelle soll zunächst der Begriff „Normrelation“ genauer bestimmt werden. Als Grundlage dient Jacobson [22], chap. 1.6.
Sei A eine beliebige endlichdimensionale, assoziative k-Algebra mit k-Basis $(e_1, \ldots, e_n)$. Sei $a \in A$ und a_A der Endomorphismus $A \longrightarrow A; b \longmapsto ab$. Identifiziere a_A mit der Matrixdarstellung von a_A bzgl. $(e_1, \ldots, e_n)$. Dann ist die *Norm* von a in A

$$N_{A/k}(a) \ := \ \det(a_A) \ \in k \ .$$

Der Wert $N_{A/k}(a)$ ist basisunabhängig. Sei $K := k(x_1, \ldots, x_n)$ der rationale Funktionenkörper in n Variablen über k, und sei

$$x := \sum e_i \otimes x_i \in A_K := A \otimes_k K \ .$$

x heißt *generisches Element* von A. Die Norm von x in A_K ist ein Element aus K. Nach Jacobson [22], lemma 1.6.3, ist $N_{A_K/K}(x)$ ein homogenes Polynom vom Grad n über k in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Definiere das *Normpolynom* von A/k bezüglich der Basis $(e_1, \ldots, e_n)$

$$n_{A/k}(x_1, \ldots, x_n) \ := \ N_{A_K/K}(x) \in k[x_1, \ldots, x_n] \ .$$

Wegen[110]

$$N_{A_K/K}(a \otimes 1) = N_{A/k}(a)$$

für $a \in A$ gilt für $a = \sum a_i e_i$

$$n_{A/k}(a_1, \ldots, a_n) = N_{A_K/K}(a \otimes 1) = N_{A/k}(a) \ .$$

[110] Siehe z. B. Lorenz [29], Par. 13.1, Bemerkung (10), S. 153.

Insbesondere ist $n_{A/k}$ von der Wahl einer Basis von A abhängig. Eine *Normrelation* ist eine Gleichung der Form

$$n_{A/k}(x_1, \dots, x_n) = bx_0^n$$

für eine k-Algebra A, einen Skalar $b \in k$ und eine weitere Variable x_0.

Sei $A = (G, s)_k$ eine verschränkte Gruppenalgebra mit $|G| = n$ und der üblichen Basis $\big(e_\sigma \mid \sigma \in G\big)$. Die Rechtsmultiplikation eines Elements $\alpha = \sum_{\tau \in G} \alpha_\tau e_\tau \in A$ an ein Basiselement e_σ ergibt

$$e_\sigma \sum_{\tau \in G} \alpha_\tau e_\tau = \sum_\tau \alpha_\tau s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau} = \sum_\tau \alpha_{\sigma^{-1}\tau} s_{\sigma,\sigma^{-1}\tau} e_\tau \ ,$$

d. h. die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \theta : & A & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_n\, k \\ & \alpha & \longmapsto & \big(s_{\sigma,\sigma^{-1}\tau}\alpha_{\sigma^{-1}\tau}\big)_{\tau,\sigma} \end{array}$$

ist die rechtsreguläre Darstellung von A bzgl. der Basis $\big(e_\sigma \mid \sigma \in G\big)$.
Sei $H \leq G$ ein Normalteiler von G mit beliebiger Ordnung d. Bezeichne mit $s_{|H}$ die Restriktion des Kozykels $s : G \times G \longrightarrow k^*$ auf $H \times H$. $s_{|H}$ ist auch normiert. Dann ist

$$E := (H, s_{|H})_k = k[e_\sigma | \sigma \in H]$$

eine Teilalgebra von A. Die Einschränkung von θ auf E liefert eine Darstellung $\tilde{\theta}$ von E, und zwar ist für $\alpha = \sum_{\tau \in H} \alpha_\tau e_\tau \in E$

$$\tilde{\theta}(\alpha) := \big(s_{\sigma,\sigma^{-1}\tau}\alpha_{\sigma^{-1}\tau}\big)_{\tau,\sigma \in H} \in \mathrm{Mat}_d\, k \ .$$

Die Norm eines Elements $\alpha := \sum_{\tau \in H} \alpha_\tau e_\tau$ aus E über k ist

$$N_{E/k}(\alpha) = \det \tilde{\theta}(\alpha) = \det \big(s_{\sigma,\sigma^{-1}\tau}\alpha_{\sigma^{-1}\tau}\big)_{\tau,\sigma \in H} \ .$$

Sei $\rho \in G - H$ und $\langle b \rangle \in V_{\theta/k}(A, d)$, wobei die Zeilen von b durch die Elemente von G indiziert sind. Fasse H als Element $H = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ von $\mathcal{M}^\circ_{d,G}$ auf mit $\sigma_1 = 1_G$. Benutze die Abkürzungen

$$\rho_i := \rho\sigma_i \ , \quad N^\circ := \rho H - (\rho_1) \in \mathcal{M}^\circ_{d-1} \ , \quad \beta_\tau := \det b_{N^\circ + \tau} \ ,$$
$$M := N^\circ + H$$

für $i = 1, \ldots, d$ und $\tau \in H$. Definiere damit

$$B := \big(B_{ij}\big)_{ij} := \Big(b \mid b^{N^\circ,\sigma_2^{-1}} \mid \ldots \mid b^{N^\circ,\sigma_d^{-1}}\Big)_M$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc}
b_{\rho_2,1} & \ldots & b_{\rho_2,d} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\rho_2}\beta_{\sigma_2^{-1}\rho_2} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\rho_2}\beta_{\sigma_d^{-1}\rho_2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{\rho_d,1} & \ldots & b_{\rho_d,d} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\rho_d}\beta_{\sigma_2^{-1}\rho_d} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\rho_d}\beta_{\sigma_d^{-1}\rho_d} \\
\hline
b_{\sigma_1,1} & \ldots & b_{\sigma_1,d} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_1}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_1} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_1}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{\sigma_d,1} & \ldots & b_{\sigma_d,d} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_d}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_d} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_d}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_d}
\end{array}\right).$$

Wende nun auf diese Matrix den Satz 8.10 an. Dort wird eine Indizierung durch Zahlen $1, \ldots, 2d-1$ verwendet. Sei $\hat{N} := (1, \ldots, d)$ und $\hat{M} := (d, \ldots, 2d-1)$, $\hat{N}, \hat{M} \in \mathcal{M}_{d,2d-1}$. Die Bestandteile sind:

$$\begin{aligned}
B_2(b) :=& B\big(\hat{N}, \hat{M}\big) \\
=& \begin{pmatrix}
\det b_{N^\circ+\sigma_1} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_1}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_1} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_1}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_1} \\
\det b_{N^\circ+\sigma_2} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_2}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_2} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_2}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\det b_{N^\circ+\sigma_d} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_d}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_d} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_d}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_d}
\end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix}
s_{\sigma_1,\sigma_1^{-1}\sigma_1}\beta_{\sigma_1^{-1}\sigma_1} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_1}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_1} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_1}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_1} \\
s_{\sigma_1,\sigma_1^{-1}\sigma_2}\beta_{\sigma_1^{-1}\sigma_2} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_2}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_2} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_2}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
s_{\sigma_1,\sigma_1^{-1}\sigma_d}\beta_{\sigma_1^{-1}\sigma_d} & s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\sigma_d}\beta_{\sigma_2^{-1}\sigma_d} & \ldots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\sigma_d}\beta_{\sigma_d^{-1}\sigma_d}
\end{pmatrix} \\
=& \big(s_{\sigma,\sigma^{-1}\tau}\beta_{\sigma^{-1}\tau}\big)_{\tau,\sigma} ,
\end{aligned}$$

d. h.

$$\det B_2(b) \;=\; n_{E/k}(\beta_{\sigma_1}, \ldots, \beta_{\sigma_d}) \;=\; N_{E/k}\Big(\textstyle\sum_{\tau\in H} \beta_\tau e_\tau\Big) .$$

Der andere Bestandteil ist

$$b_1(b) := \det B_{\hat{M}}^{\hat{N}} \det B_1$$

mit

$$B_1 := B_{-\hat{M}}^{-\hat{N}} = \begin{pmatrix} s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\rho_2}\beta_{\sigma_2^{-1}\rho_2} & \dots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\rho_2}\beta_{\sigma_d^{-1}\rho_2} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\sigma_2,\sigma_2^{-1}\rho_d}\beta_{\sigma_2^{-1}\rho_d} & \dots & s_{\sigma_d,\sigma_d^{-1}\rho_d}\beta_{\sigma_d^{-1}\rho_d} \end{pmatrix} .$$

Da H ein Normalteiler ist, ist $\sigma_i^{-1}\rho_j = \rho(\rho^{-1}\sigma_i^{-1}\rho)\sigma_j \in \rho H$, d. h.

$$\beta_{\sigma_i^{-1}\rho_j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sigma_i^{-1}\rho_j \neq \rho \\ s_{\sigma_i,\sigma_i^{-1}\rho_j} & \text{falls } \sigma_i^{-1}\rho_j = \rho \end{cases} .$$

In jeder Zeile der Matrix B_1 ist also nur genau ein Eintrag ungleich Null und die Determinante ist bis auf das Vorzeichen das Produkt dieser Elemente, und zwar

$$\det B_1 = \det e_{N^\circ}^{\rho^{-1}N^\circ\rho} \prod_{i=2}^{d} s_{\sigma_i,1}\beta_1 ,$$

wobei e die $d-1 \times d-1$-Einheitsmatrix ist. Für das Vorzeichen erhält man folgendes: Sei $\pi \in \mathcal{S}_{d-1}$ die Permutation, die N° in $\rho^{-1}N^\circ\rho$ überführt[111], und $\pi' \in \mathcal{S}_d$ die Permutation, die H in $\rho^{-1}H\rho$ überführt. Wegen

$$H = 1 + N^\circ \quad \text{und } \rho^{-1}H\rho = 1 + \rho^{-1}N^\circ\rho$$

gilt

$$\operatorname{sign}\pi = \operatorname{sign}\pi' .$$

Einerseits gilt

$$\det e_{N^\circ}^{\rho^{-1}N^\circ\rho} = \operatorname{sign}\pi ,$$

andererseits folgt[112] aus den Lemmata 5.8 und 5.6 iii), daß allgemein für $N \in \mathcal{M}_{\nu,G}$ und $\sigma \in G$ mit $\overline{\sigma N} = \overline{N}$ das Vorzeichen $\operatorname{sign}_\sigma N$ der Permutation, die N in σN überführt, nur von der Ordnung von σ und ν abhängt, und zwar gilt

$$\operatorname{sign}_\sigma N = (-1)^{\frac{d}{\operatorname{ord}\sigma}(\operatorname{ord}(\sigma)-1)} .$$

[111]Für Rechtsoperation von Gruppenelementen auf Elementen aus $\mathcal{M}_{\nu,G}^\circ$ seien analoge Begriffe definiert.

[112]Genauer gesagt aus den naheliegenden Verallgemeinerungen.

Daraus folgt, daß

$$\operatorname{sign}\pi' = 1.$$

Ist A zentraleinfach und $\operatorname{ord}\rho$ ein Teiler von d, so folgt mit $\nu := d/\operatorname{ord}\rho$

$$\begin{aligned}\det b_1(b) &= \det B_{\hat{M}}^{\hat{N}} \det B_1 \\ &= \det b_H (\det b_{N^\circ+\rho})^{d-1} \prod_{i=2}^{d} s_{\sigma_i,\rho} \\ &= \operatorname{Nred} e_\rho^\nu \det b_{\rho H} (-1)^{(d-1)^2} (\det b_{\rho H})^{(d-1)} \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{d} s_{\sigma_i,\rho}}{s_\rho^\circ(H)}}_{=1} \\ &= (-1)^{(d-1)} \operatorname{Nred} e_\rho^\nu (\det b_{\rho H})^d \ .\end{aligned}$$

Satz 8.11. *Sei $A = (G,s)_k$ eine zentraleinfache verschränkte Gruppenalgebra mit $|G| = n = d^2$ und der Basis $\big(e_\sigma \mid \sigma \in G\big)$. Sei $H \leq G$ ein Normalteiler von G mit Ordnung μd und*

$$E := (H, s_{|H})_k = k[e_\sigma | \sigma \in H].$$

Sei $\rho \in G - H$ und $\langle b\rangle$ ein μd-dimensionaler k-Untervektorraum von A. Dann gilt

$$\langle b\rangle \in BS_{A,\mu} \quad\Longrightarrow\quad \beta^{\mu d} \operatorname{Nred}_{A/k} e_\rho^\mu \;=\; N_{E/k}(\underline{b}) \ ,$$

wobei $\beta := \det b_{\rho H}$ und $\underline{b} = \sum_{\tau\in H} \beta_\tau e_\tau$ mit $\beta_\tau := \det b_{\rho H - \rho + \tau}$.

8.4 Anmerkungen

Sei $A = (G,s)_k$ eine zentraleinfache verschränkte Gruppenalgebra und $E \subseteq A$ eine Unteralgebra wie oben. Hat die Brauer-Severi-Varietät $V_{A,\mu}$ einen k-rationalen Punkt p, so besagt Satz 8.11, daß für alle $\rho \in G$

$$\operatorname{Nred}_{A/k} e_\rho^\mu \;\in\; N_{E/k}(E^*) \qquad (*)$$

gilt. Daß die Aussage tatsächlich auch für $\rho \in H$ gilt, ist leicht nachzurechnen. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 7.2 läßt sich diese Beziehung geometrisch deuten: Sei $\rho \in G - H$ und ZN_ρ die Nullstellenmenge des Polynoms $n_{E/k}(\underline{x}) - \operatorname{Nred}_{A/k}(e_\rho^\mu) x^{\mu d}$ in $\mathbf{P}^d$. Dann läßt sich ein Morphismus

$$\Theta : V_{A,\mu} \cap U_{\overline{\rho H}} \;\longrightarrow\; ZN_\rho$$

definieren, der einen Punkt p aus $V_{A,\mu} \cap U_{\overline{\rho H}}$ auf einen Punkt aus $\mathbf{P}^d$ abbildet, dessen Koordinaten $d+1$ Koordinaten von p sind. Da p aus $V_{A,\mu} \cap U_{\overline{\rho H}}$ ist, kann man aus diesen Koordinaten durch die linearen Relationen

$$x_M = D(M) x_{\Pi(M)}$$

weitere Koordinaten zurückgewinnen, so daß man die Abbildung P_M^* anwenden kann und somit eine Umkehrabbildung erhält. Aus Dimensionsgründen ist das Bild von $V_{A,\mu} \cap U_{\overline{\rho H}}$ in $\mathbf{P}^d$, das isomorph zu $V_{A,\mu} \cap U_{\overline{\rho H}}$ selbst ist, eine offene Teilmenge von ZN_ρ, d.h. schon an dieser Stelle erhält man das Ergebnis, daß $V_{A,\mu}$ und ZN_ρ birational äquivalent sind.
Das primäre Ziel dieses dritten Teils ist jedoch die Untersuchung von Symbolalgebren. Für diese kann die Methode, über die Konstruktion von Linksidealen einen konkreten Umkehrmorphismus zu erhalten, vom Beispiel $d = 3$ auf Symbolalgebren beliebigen Grades übertragen werden. Deshalb ist der hier skizzierte Ansatz vorerst nicht weiter verfolgt worden.
Eine weitere Verallgemeinerung des Ergebnisses dieses Kapitels scheint dadurch möglich zu sein, daß man statt verschränkter Gruppenalgebren beliebige zentraleinfache Algebren betrachtet und die in den Beweisen verwendete Gruppenoperation durch Linksmultiplikation in der Algebra ersetzt. Möglicherweise läßt sich so ein Ergebnis erzielen, das eine Aussage $(*)$ für alle Elemente aus A ermöglicht und zu einer Aussage der Form

$$\operatorname{Nred} A^\mu \subseteq N_{E/k}(E)$$

führen könnte.

Kapitel 9

Konstruktion von Idealen von Symbolalgebren

9.1 Étale Algebren

In diesem Abschnitt sollen nur kurz einige Tatsachen über étale Algebren erwähnt werden, die dem Buch von Knus u. a. ([26], S. 279 ff.) entnommen sind. Der Begriff der étalen Algebra über einem Grundkörper ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Körpererweiterung und tritt bei der Betrachtung von kommutativen Teilalgebren von zentraleinfachen Algebren als Verallgemeinerung der Betrachtung von kommutativen Teilkörpern auf.
Seien alle im folgenden betrachteten k-Algebren assoziativ und unitär. Sei k ein beliebiger Grundkörper und E eine kommutative k-Algebra. Sei $X(E/k)$ die Menge der k-Algebra-Homomorphismen von E in einen separablen Abschluß von k:

$$X(E/k) := \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}\big(E, k_{\mathrm{sep}}\big).$$

Proposition 9.1. *Für eine endlichdimensionale, kommutative k-Algebra E sind folgende Aussagen äquivalent*

i) $E \cong K_1 \times \ldots \times K_r$ *, wobei* $K_1, \ldots, K_r$ *separable Körpererweiterungen von* k *sind ,*

ii) $E \otimes_k k_{sep} \cong k_{sep} \times \ldots \times k_{sep}$ *,*

iii) $|X(E/k)| = \dim_k E$ *,*

iv) $|X(E/k)| \geq \dim_k E$ *.*

Falls k unendlich ist, so sind diese Aussagen äquivalent zur Aussage *v) $E \cong k[t]/(f)$ für ein Polynom $f \in k[t]$ ohne mehrfache Nullstelle in einem algebraischen Abschluß von k.*

Beweis. Siehe [26], S. 281, und die dortigen Verweise. □

Eine k-Algebra, die die äquivalenten Bedingungen i) bis iv) erfüllt, heißt *étale Algebra*. Es lassen sich viele Begriffe und Methoden der Theorie der Körpererweiterungen übertragen. So läßt sich die Norm in E/k folgendermaßen schreiben (vgl. [26], S. 283):

$$N_{E/k}(a) = \det(\theta(a)) = \prod_{\sigma \in X(E/k)} \sigma(a) \; .$$

Dabei ist θ eine reguläre Darstellung von E/k.

Zyklische étale Algebren

Betrachte nun die spezielle Situation einer étalen Algebra $E := k[e]$, bei der e das Minimalpolynom[113] $x^d - s_0$ mit $s_0 \in k$ hat und der Grundkörper eine d-te primitive Einheitswurzel ξ enthält. Sei $\bar{e}$ eine Nullstelle von $x^d - s_0$ aus k_{sep}. Dann induziert die Zuordnung $e \longmapsto \bar{e}$ einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\bar{\ } : E \longrightarrow k_{\mathrm{sep}} \; ,$$

d. h. $\bar{\ } \in X(E/k)$. Die Abbildung

$$\sigma : E \longrightarrow E; e \longmapsto \xi e$$

ist ein k-Algebra-Automorphismus auf E; ebenso die Abbildungen σ^i, $i = 0, \ldots, d-1$, die alle verschieden sind. Die Abbildungen $\bar{\ } \circ \sigma^i$, $i = 0, \ldots, d-1$, sind aus $X(E/k)$, und sie sind alle verschieden, denn da d kein Vielfaches der Charakteristik von k ist (vgl. Fußnote auf Seite 98), ist das Polynom $x^d - s_0$ separabel über k. Nach obiger Proposition ist damit E eine étale Algebra[114] und

$$X(E/k) = \bar{\ } \circ \langle \sigma \rangle := \left\{ \bar{\ } \circ \sigma^i \mid i = 0, \ldots, d-1 \right\}.$$

Die Norm eines Elements $a \in E$ läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$N_{E/k}(a) = \overline{\left(\prod_{i=0}^{d-1} \sigma^i(a) \right)} \; .$$

[113]Mit Minimalpolynom ist hier das normierte Polynom aus $k[x]$ kleinsten Grades mit Nullstelle e gemeint.

[114]Dies ist erst jetzt klar, da k nicht als unendlich vorausgesetzt wurde.

Allgemein läßt sich der Isomorphismus aus Bedingung ii) von Proposition 9.1 folgendermaßen schreiben:

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_k k_{\text{sep}} & \longrightarrow & \bigoplus_i k_{\text{sep}} \\ a \otimes \lambda & \longmapsto & \bigoplus\limits_{\rho \in X(E/k)} \lambda\rho(a) \ . \end{array}$$

In der vorliegenden Situation ergibt sich für Elemente aus $E \subseteq E \otimes_k k_{\text{sep}}$

$$\begin{array}{ccl} E \otimes_k k_{\text{sep}} & \longrightarrow & \bigoplus_i k_{\text{sep}} \\ a \otimes 1 & \longmapsto & \bigoplus\limits_{i=0}^{d-1} \overline{\sigma^i(a)} \\ \sigma(a) \otimes 1 & \longmapsto & \bigoplus\limits_{i=0}^{d-1} \overline{\sigma^{i+1}(a)} \\ \prod\limits_i \sigma^i(a) \otimes 1 & \longmapsto & \prod\limits_i \bigoplus\limits_j \overline{\sigma^{i+j}(a)} \ = \ \bigoplus\limits_j N_{E/k}(a) \ , \end{array}$$

d. h. $\prod_i \sigma^i(a)$ ist aus $k \subseteq E$.

Bemerkung 9.2. Faßt man k als Teilkörper von E auf, so gilt für die Norm

$$N_{E/k}(a) = \prod_{i=0}^{d-1} \sigma^i(a) \ .$$

Ist θ die reguläre Darstellung von E/k bezüglich der Basis $1, e, \ldots, e^{d-1}$, so gilt außerdem

$$\theta(\sigma(a)) = \tilde{\kappa}\theta(a)\tilde{\kappa}^{-1}$$

für alle $a \in E$ mit

$$\tilde{\kappa} := \left(\xi^i \delta_{ij}\right)_{i,j=0,\ldots,d-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{d-1} \end{pmatrix} .$$

9.2 Konstruktion

Sei k ein beliebiger Grundkörper und A eine endlichdimensionale k-Algebra. Sei $e \in A^*$ ein invertierbares Element aus A mit Minimalpolynom

$$\operatorname{Mipo}_k e = x^d - s_0 \ .$$

Dann ist $E := k[e] \subseteq A$ eine étale Algebra der Dimension $\dim_k E = d$, wie sie oben betrachtet wurde. E ist isomorph zur k-Algebra $K_{s_0,d} := k[t]/(t^d - s_0)$ (vgl. S. 97). Sei ξ eine primitive d-te Einheitswurzel, die in k enthalten ist. Definiere die Koordinatenabbildung bezüglich der Basis $1, e, e^2, \ldots, e^{d-1}$

$$\vec{\cdot} : E \longrightarrow k^d, a \longmapsto (\alpha_i)_{i=0,\ldots,d-1} , \quad \text{wobei } a = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i e^i .$$

Sei für $a \in E$

$$a_i := ae^i \in E , \quad i = 0, \ldots, d-1$$

und

$$\theta(a) := \left(\vec{a_0}| \ldots |\vec{a_{d-1}}\right) = (\alpha_{ij})_{ij} , \quad \text{mit } a_j = \sum_i \alpha_{ij} e^i .$$

Die Abbildung $\theta : E \longrightarrow \operatorname{Mat}_d k$ ist die linksreguläre Darstellung von E bezüglich der Basis $1, e, e^2, \ldots, e^{d-1}$, d. h.

$$\theta(a)\vec{a'} = \vec{aa'}$$

für $a' \in E$ und die Norm von a ist

$$N_{E/k}(a) = \det \theta(a).$$

Eine Idee ist nun, die Kommutationsrelation in E auf Ebene der regulären Darstellung

$$\theta(a)\theta(b) = \theta(b)\theta(a)$$

als Invarianzeigenschaft des von den Spalten der Matrix $\theta(b)$ erzeugten Untervektorraumes zu lesen:

$$\theta(a)\langle\theta(b)\rangle = \langle\theta(b)\rangle.$$

Schreibe für $a \in E$ und $u \in k^d$ abkürzend $au := \theta(a)u$. Definiere für $a \in E$ rekursiv eine Folge von Matrizen

$$b^{(0)} := vE_d \quad b^{(1)} := \theta(a) , \quad b^{(\nu+1)} := \tilde{\kappa} b^{(\nu)} c^{-1}$$

mit der $d \times d$-Einheitsmatrix E_d und

$$c := {b^{(1)}}^{-1} \tilde{\kappa} b^{(0)} \text{ und } \tilde{\kappa} := (\xi^i \delta_{ij})_{i,j=0,\ldots,d-1} .$$

Lemma 9.3. *Für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$b^{(\nu)} = \theta(a^{(\nu)})$$

mit

$$a^{(0)} := v \text{ und } a^{(\nu+1)} := \frac{1}{v}\sigma(a^{(\nu)})a.$$

Beweis. Es gilt

$$b^{(\nu+1)} = \tilde{\kappa} b^{(\nu)} {b^{(0)}}^{-1} \tilde{\kappa}^{-1} b^{(1)} = \frac{1}{v} \tilde{\kappa} b^{(\nu)} \tilde{\kappa}^{-1} \theta(a) \ .$$

Ist nun $b^{(\nu)} = \theta(a^{(\nu)})$, so folgt mit Bemerkung 9.2

$$b^{(\nu+1)} = \theta\big(\frac{1}{v}\sigma(a^{(\nu)})a\big) \ .$$

□

Insbesondere gilt damit $e\langle b^{(\nu)}\rangle = \langle b^{(\nu)}\rangle$. Sei $\hat{e} \in A^* - E$ mit $\mathrm{Mipo}_k\, \hat{e} = x^d - \hat{s}_0$ und $\hat{e}e = \xi e\hat{e}$. Betrachte die Matrix

$$b := \begin{pmatrix} b^{(0)} \\ b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(d-1)} \end{pmatrix} \in \mathrm{St}_{d^2,d}\, k \ .$$

Fasse deren Spalten als Koordinatenvektoren von Elementen aus $k[e,\hat{e}] \subseteq A$ bezüglich der Basis $1, e, \ldots, e^{d-1}, \hat{e}, e\hat{e}, \ldots, e^{d-1}\hat{e}^{d-1}$ auf.

Proposition 9.4. *Falls $N_{E/k}(a) = \frac{v^d}{\hat{s}_0}$, so ist $\langle b\rangle$ ein Linksideal von $k[e,\hat{e}]$.*

Beweis. Gezeigt wurde ja schon, daß $e\langle b\rangle = \langle b\rangle$ gilt.
Beh.:

$$\hat{e}b = bc.$$

Bezeichne für ein $\tilde{b} \in \mathrm{St}_{d^2,d}\, k$ mit $\tilde{b}^{(\nu)}$ die Matrix mit den Zeilen aus $\tilde{b}$, die zu den Basisvektoren $\hat{e}^\nu, \ldots, e^{d-1}\hat{e}^\nu$ korrespondieren. Es gilt für $\nu = 0, \ldots, d-1$

$$(\hat{e}b)^{(\nu)} = \tilde{\kappa} b^{(\nu-1)}$$

und nach Definition für $\nu = 1, \ldots, d-1$

$$b^{(\nu)}c = \tilde{\kappa} b^{(\nu-1)},$$

d. h. es bleibt zu zeigen, daß $(\hat{e}b)^{(0)} = b^{(0)}c$. Erhalte durch wiederholte Anwendung der Definitionen

$$\begin{aligned}(\hat{e}b)^{(0)}c^{-1} &= \hat{s_0}\tilde{\kappa}b^{(d-1)}c^{-1} = \hat{s_0}b^{(d)} = \hat{s_0}\theta(a^{(d)}) = \hat{s_0}\theta\left(\frac{1}{v}\sigma(a^{(d-1)})a\right) \\ &= \ldots = \hat{s_0}\theta\left(\frac{1}{v^d}\sigma^d(a^{(0)})\Pi_{i=0}^{d-1}\sigma^i(a)\right) = \hat{s_0}\frac{N_{E/k}(a)}{v^d}\theta(a^{(0)}) \ ,\end{aligned}$$

d. h.

$$(\hat{e}b)^{(0)} = b^{(0)}c \quad \Longleftrightarrow \quad v^d = \hat{s_0}N_{E/k}(a) \ .$$

□

Aus der Konstruktion von b folgt auch noch die Eindeutigkeit

Korollar 9.5. *Ist $\langle b\rangle$ ein Linksideal von $k[e, \hat{e}]$ mit*

$$b^{(0)} = vE_d \quad \text{und } b_i^{(1)} = v_i$$

mit Werten $v, v_1, \ldots, v_d \in k$, so ist b eindeutig durch obige Konstruktion gegeben.

Kapitel 10

Brauer-Severi-Varietäten von Symbolalgebren

Sei $d \in \mathbb{N}$ und ξ eine primitive d-te Einheitswurzel, die im Grundkörper k enthalten ist. Seien $a, b \in k^*$ Skalare und A die Symbolalgebra

$$A := \left(\frac{a, b}{k, \xi}\right) = \left\langle x, y \mid x^d = a, y^d = b, yx = \xi xy \right\rangle_k .$$

Schreibe A als Gruppenalgebra $(G, s)_k$, wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, mit der Gruppe $G := \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$ und dem normierten 2-Kozykel s:

$$A = \bigoplus_{(i,j) \in G} k e_{(i,j)}$$

mit $e_{(i,j)} := x^{\underline{i}} y^{\underline{j}}$ und

$$e_\sigma e_\tau = s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau} \ .$$

Sei $G = \langle \sigma \rangle \times \langle \tau \rangle$ und $H := \langle \sigma \rangle$. Dann ist

$$E := k[e_\sigma] = (H, s_{|H})_k \cong k[t]/(t^d - s_0) \quad \text{mit } s_0 := \prod_{i=1}^{d-1} s_{\sigma,\sigma^i} \ .$$

Außerdem ist $\mathrm{Mipo}_k\, e_\tau = x^d - \hat{s}_0$ mit

$$\hat{s}_0 = \prod_{i=1}^{d-1} s_{\tau,\tau^i} = \mathrm{Nred}\, e_\tau .$$

Hier wirkt sich nun negativ aus, was in den beiden vorigen Kapiteln beweistechnisch vorteilhaft war, nämlich die Wahl verschiedener Basen von A. Im letzten Kapitel wurde die Basis $1, e_\sigma, e_\sigma^2, \ldots, e_\sigma^{d-1}$ verwendet, im vorletzten $e_1, e_\sigma, e_{\sigma^2}, \ldots, e_{\sigma^{d-1}}$. Beide stehen in folgendem Zusammenhang:

$$e_\sigma^j = s(\sigma, j) e_{\sigma^j} \text{ mit } s(\sigma, j) := \prod_{i=0}^{j-1} s_{\sigma,\sigma^i}$$

für $j = 0, 1, \ldots, d-1$. Sei $n_{E/k}$ das Normpolynom von E/k zur Basis $e_1, e_\sigma, e_{\sigma^2}, \ldots, e_{\sigma^{d-1}}$ und $\rho := \tau^{-1}$. Definiere

$$ZN(\sigma, \tau) := \mathrm{Z}\left(n_{E/k}(y_1, \ldots, y_d) - y_0^d \operatorname{Nred} e_\rho\right) \subseteq \mathbf{P}^d .$$

Sei $\tilde{n}_{E/k}$ das Normpolynom von E/k zur Basis $1, e_\sigma, e_\sigma^2, \ldots, e_\sigma^{d-1}$ und

$$\widetilde{ZN}(\sigma, \tau) := \mathrm{Z}\left(\tilde{n}_{E/k}(y_1, \ldots, y_d) - \frac{y_0^d}{\hat{s}_0}\right) \subseteq \mathbf{P}^d .$$

Beide Varietäten sind isomorph

$$\begin{array}{ccc} ZN(\sigma, \tau) & \longrightarrow & \widetilde{ZN}(\sigma, \tau) \\ (y : y_0 : \ldots : y_{d-1}) & \longmapsto & (s_{\tau^{-1},\tau} y : s(\sigma, 0) y_0 : \ldots : s(\sigma, d-1) y_{d-1}) \end{array} \tag{$*$}$$

wegen

$$\frac{1}{\hat{s}_0} = \operatorname{Nred} e_\tau^{-1} = \operatorname{Nred} s_{\tau^{-1},\tau} e_{\tau^{-1}} = s_{\tau^{-1},\tau}^d \operatorname{Nred} e_\rho .$$

Definiere

$$U_0 := \mathbf{P}^d - \mathrm{Z}\left(y_0\right)$$

und für $\overline{k}^* \wedge b$ und $i = 0, \ldots, d-1$

$$\beta := \det b_{\rho H} \quad \text{und} \quad \beta_i := \det b_{\rho H - \rho + \sigma^i} .$$

Satz 10.1. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & V_{A,1} \cap U_{\rho H} & \longrightarrow & ZN(\sigma, \tau) \cap U_0 \subseteq \mathbf{P}^d \\ & \overline{k}^* \wedge b & \longmapsto & (\beta : \beta_0 : \ldots : \beta_{d-1}) \end{array}$$

ist ein über k definierter Isomorphismus.

Beweis. Sei $p = \overline{k}^* \wedge b \in V_{A,1} \cap U_{\rho H}$. Dann ist $\beta \neq 0$ und $\Psi(p) \in U_0$. Da $\langle b \rangle \in \mathrm{BS}_{A,1}$, ist nach Satz 8.11

$$\beta^d \operatorname{Nred} e_\rho = n_{E/k}(\beta_0, \ldots, \beta_{d-1})$$

und somit $\Psi(p) \in ZN(\sigma,\tau)$. Konstruiere nun die Umkehrabbildung Ψ^*. Sei $q \in \widetilde{ZN}(\sigma,\tau)$. Dann wurde in Abschnitt 9.2 eine Matrix $b \in \mathrm{St}_{d^2,d}\,k$ konstruiert, deren Spalten, als Vektoren bezüglich der Basis

$$1, e_\sigma, \ldots, e_\sigma^{d-1}, e_\tau, e_\tau e_\sigma, \ldots, e_\tau^{d-1} e_\sigma^{d-1}$$

von A, ein Linksideal erzeugen, d. h. $\langle b\rangle \in \mathrm{BS}_{A,1}$. Schaltet man den Isomorphismus $(*)$ davor und die Plücker-Einbettung nach, so hat man einen Morphismus Ψ^* von $ZN(\sigma,\tau) \cap U_0$ nach $V_{A,1} \cap U_{\rho H}$, denn die Koordinatenfunktionen sind alle homogen vom Grad d. Diese Morphismen sind invers zueinander: Sei $(y : y_0 : \ldots : y_{d-1}) \in ZN(\sigma,\tau)$. Dann ist

$$(v : v_0 : \ldots : v_{d-1}) := (s_{\tau^{-1},\tau} y : s(\sigma,0)y_0 : \ldots : s(\sigma,d-1)y_{d-1})$$

in $\widetilde{ZN}(\sigma,\tau)$. Die Matrix b hat die Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc} v & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v \\ \hline v_0 & & \\ \vdots & * & \\ v_{d-1} & & \\ \hline & & \\ & * & \\ & & \end{array}\right).$$

Ein Basiswechsel zu

$$1, e_\sigma, \ldots, e_{\sigma^{d-1}}, e_\tau, e_{\tau\sigma}, \ldots, e_{\tau^{d-1}\sigma^{d-1}}$$

führt zu einer Matrix $\hat{b}$ von der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c}
\begin{matrix} s(\sigma,0)v & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s(\sigma,d-1)v \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} s_{\tau,\sigma^0}s(\sigma,0)v_0 & \\ \vdots & * \\ s_{\tau,\sigma^{d-1}}s(\sigma,d-1)v_{d-1} & \end{matrix} \\ \hline
\\ * \\ \\
\end{array}\right) .$$

$(y : y_0 : \ldots : y_{d-1})$ wird unter Ψ^* abgebildet auf $\overline{k}^* \wedge \hat{b}$. Das Bild von $\overline{k}^* \wedge \hat{b}$ unter Ψ hat folgende Koordinaten

$$\begin{aligned}
\det \hat{b}_{\rho H} &= \frac{s_\rho^\circ(H)}{\operatorname{Nred} e_\rho} \det \hat{b}_H = \frac{s_\rho^\circ(H)}{\operatorname{Nred} e_\rho} \prod_{i=0}^{d-1} s(\sigma,i) v^d \\
&= \frac{s_\rho^\circ(H)}{\operatorname{Nred} e_\rho} s_{\tau^{-1},\tau}^d \prod_{i=0}^{d-1} s(\sigma,i) y^d \\
\det \hat{b}_{\rho H-\rho+\sigma^j} &= \frac{s_\rho^\circ(H-1)}{\operatorname{Nred} e_\rho} s_{\rho,\tau\sigma^j} \det \hat{b}_{H-1+\tau\sigma^j} \\
&= \frac{s_\rho^\circ(H)}{\operatorname{Nred} e_\rho} \prod_{i=1}^{d-1} s(\sigma,i) \underbrace{s_{\rho,\tau\sigma^j} s_{\tau,\sigma^j}}_{=s_{\tau^{-1},\tau}} s(\sigma,j) v^{d-1} v_j \\
&= \frac{s_\rho^\circ(H)}{\operatorname{Nred} e_\rho} s_{\tau^{-1},\tau}^d \prod_{i=0}^{d-1} s(\sigma,i) y^{d-1} y_j \ ,
\end{aligned}$$

d. h. es ist gleich

$$(y : y_0 : \ldots : y_{d-1}) \ .$$

Aus Korollar 9.5 folgt, daß Ψ injektiv ist. $\square$

Satz 10.2. *Sei A wie oben eine Symbolalgebra vom Grad d mit $G = \langle\sigma\rangle \times \langle\tau\rangle$ und $E := k[e_\sigma]$. Dann sind die Brauer-Severi-Varietät $V_{A,1}$ und die Normvarietät $ZN(\sigma, \tau)$ birational äquivalent und die dazugehörigen Funktionenkörper isomorph.*

Anhang

Anhang A

Grundlagen aus der algebraischen Geometrie

A.1 Geometrisches Konzept

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit liefern Zusammenhänge zwischen K-rationalen Lösungen von Gleichungen, die über einem Grundkörper k definiert sind. Dies hat auf die Wahl des geometrischen Konzepts Einfluß: Es wird ein „klassischer“ Standpunkt gewählt, bei dem Nullstellenmengen von Polynomen über einem festen, algebraisch abgeschlossenen Oberkörper $\overline{k} \supseteq k$ betrachtet werden, so daß für Zwischenkörper $\overline{k}/K/k$ die K-rationalen Lösungen als K-rationale Punkte der zugehörigen Nullstellenmenge erscheinen.
Es folgen kurz einige Definitionen und Bemerkungen, um die Schreibweise festzulegen. Zudem werden einige Ergebnisse zitiert, die in der Arbeit benötigt werden. Die verwendeten Quellen wurden leicht modifiziert.[115]

Sei k ein Körper, $\overline{k} \supseteq k$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper und K ein Zwischenkörper von $\overline{k}/k$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist der n-dimensionale *affine* bzw. *projektive Raum* definiert durch

$$\mathbf{A}_k^n := \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \overline{k} \right\} \text{ und}$$
$$\mathbf{P}_k^n := \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \mid a_i \in \overline{k}, a_i \neq 0 \text{ für ein } i \right\} / \sim$$

[115] Hauptquellen sind Hartshorne [15], Brodmann [7] und Shafarevich [41]. Der Aspekt der K-Rationalität ist bei Borel [6] und Mumford [31] dargestellt. Tatsachen über algebraische Gruppen sind auch bei Humphreys [18] zu finden.

mit der Äquivalenzrelation

$$p \sim q :\Longleftrightarrow p = \lambda q \text{ mit } \lambda \in \overline{k}^*.$$

Falls es keine Unklarheit gibt, wird der Index k weggelassen. Ist $(a_0, \ldots, a_n)$ ein Repräsentant von $p \in \mathbf{P}^n$, so wird für die Klasse p auch

$$(a_0 : \ldots : a_n) \quad \text{oder} \quad \overline{k}^*(a_0, \ldots, a_n)$$

geschrieben. Ist X eine Teilmenge von $\mathbf{A}^n$ oder $\mathbf{P}^n$, so bezeichne mit $X(K)$ die Menge der K-rationalen Punkte von X.
Ist W ein k-Vektorraum der Dimension n, so ist mit der *Projektivierung* $\mathbf{P}W$ von W der projektive Raum $\mathbf{P}(W \otimes_k \overline{k}\,) := \mathbf{P}_k^{n-1}$ gemeint, wobei die Vektoren aus $W \otimes_k \overline{k}$ mit ihren Koordinatenvektoren bezüglich einer festen Basis identifiziert werden. Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine k-Basis von W, so ist $e_1 \otimes 1, \ldots, e_n \otimes 1$ eine $\overline{k}$-Basis von $W \otimes_k \overline{k}$. Sei $v \in W \otimes_k \overline{k}$ mit $a_1, \ldots, a_n$ als Koordinaten bezüglich dieser Basis. Es werden auch die Schreibweisen

$$\overline{k}^* v \;:=\; \overline{k}^* \sum_{i=0}^{n} a_i e_i \;:=\; (a_1 : \ldots : a_n) \;\in\; \mathbf{P}W$$

verwendet. Identifiziere W mit dem k-Unterraum $W \otimes_k 1$ von $W \otimes_k \overline{k}$. Die k-rationalen Punkte von $\mathbf{P}W$ sind dann genau die Punkte der Form $\overline{k}^* w$ mit $w \in W$.
Bezeichne mit $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ die Multivariablen $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(y_0, \ldots, y_n)$. Ist $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, so ist $\mathbf{x}^\nu$ das Monom $x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$ ($\mathbf{y}^\mu$ mit $\mu \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ entsprechend). Ist $T \subseteq \overline{k}\,[\mathbf{x}]$ eine Menge von Polynomen und $T' \subseteq \overline{k}\,[\mathbf{y}]$ eine Menge von homogenen Polynomen, so werden die Nullstellenmengen

$$\mathrm{Z}(T) := \left\{ p \in \mathbf{A}^n \mid f(p) = 0 \quad \forall\, f \in T \right\} \subseteq \mathbf{A}^n \text{ und}$$
$$\mathrm{Z}(T') := \left\{ p \in \mathbf{P}^n \mid f(p) = 0 \quad \forall\, f \in T' \right\} \subseteq \mathbf{P}^n$$

mit $f((a_0 : \ldots : a_n)) := f(a_0, \ldots, a_n)$ als (*affine* bzw. *projektive*) *Varietäten* oder *algebraische Mengen* bezeichnet. Wegen Hilberts Basissatz können die Polynommengen stets als endlich angenommen werden. Eine algebraische Menge X heißt *über K definiert*, falls Polynome $T \in K[\mathbf{x}]$ existieren mit $X = \mathrm{Z}(T)$. Schreibe dafür X/K. Über algebraischen Mengen wird die *Zariski-Topologie* eingeführt, indem man als abgeschlossene Mengen genau die über $\overline{k}$ definierten algebraischen Mengen wählt. Offene Teilmengen von

affinen und projektiven Varietäten werden *quasiaffine* bzw. *quasiprojektive Varietäten* genannt. Alle affinen, quasiaffinen und projektiven Varietäten sind isomorph[116] zu quasiprojektiven Varietäten. Quasiprojektive Varietäten heißen auch *lokal abgeschlossene Mengen*.
Zwei algebraische Mengen sind gleich, wenn sie aus den gleichen Punkten bestehen, also z. B. wenn sie durch die gleichen Polynommengen definiert werden - unabhängig davon, über welchem Teilkörper von $\overline{k}$ diese Polynome betrachtet werden. Ist X eine Teilmenge von $\mathbf{A}^n$ oder $\mathbf{P}^n$, so wird ein Wechsel des Grundkörpers mit

$$X \times_k K$$

gekennzeichnet. Dies dient nur der Deutlichkeit von Aussagen, die Menge bleibt dieselbe. Ist z. B. X aus $\mathbf{P}^n$, so gilt

$$X = X \times_k K \subseteq \mathbf{P}^n_k = \mathbf{P}^n_k \times_k K = \mathbf{P}^n_K \; .$$

Ist Z eine Teilmenge von $\mathbf{A}^n$ oder $\mathbf{P}^n$, so heißt eine nichtleere Teilmenge $X \subseteq Z$ *irreduzibel* über K, wenn sie nicht als Vereinigung zweier echter Teilmengen von Z geschrieben werden kann, die abgeschlossen in X bezüglich der induzierten Topologie und über K definiert sind. Ist X irreduzibel über $\overline{k}$, so wird X als (absolut) irreduzibel bezeichnet. Offene Teilmengen von irreduziblen Mengen sind irreduzibel. Durchschnitte von nichtleeren offenen Teilmengen von irreduziblen Mengen sind nichtleer.
Ist $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine quasiaffine Varietät, so heißt eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{k}$ *reguläre Funktion* von X, falls f lokal als Quotient zweier Polynome aus $\overline{k}\,[\mathbf{x}]$ geschrieben werden kann. Ist $X \subseteq \mathbf{P}^n$ eine quasiprojektive Varietät, so heißt eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{k}$ reguläre Funktion von X, falls f lokal als Quotient zweier homogener Polynome gleichen Grades aus $\overline{k}[\mathbf{x}]$ geschrieben werden kann. Für eine lokal abgeschlossene Menge X ist

$$\mathcal{O}(X) := \Big\{ f : X \longrightarrow \overline{k} \mid f \text{ reguläre Funktion auf } X \Big\}$$

eine $\overline{k}$-Algebra durch die natürlichen Verknüpfungen. Reguläre Funktionen sind stetig. Ist X irreduzibel und stimmen zwei reguläre Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ überein, so sind sie gleich. Ist K ein Zwischenkörper $\overline{k}\,/K/k$, so heißt eine reguläre Funktion f über K definiert, wenn obige Polynome aus $K[\mathbf{x}]$ gewählt werden können. Die Menge der über K definierten regulären Funktionen von X

$$\mathcal{O}_K(X) := \Big\{ f : X \longrightarrow \overline{k} \in \mathcal{O}(X) \mid f \text{ über } K \text{ definiert } \Big\}$$

[116]Zur Definition von Morphismen siehe unten.

ist ein Teilring von $\mathcal{O}(X)$, der eine K-Algebra ist.
Ein *Morphismus* zwischen zwei lokal abgeschlossenen Mengen X und Y ist eine stetige Abbildung $\Phi : X \longrightarrow Y$, so daß für jede reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ einer offenen Menge $U \subseteq Y$ die Funktion $f \circ \Phi$ wieder regulär ist, d. h. $f \circ \Phi \in \mathcal{O}(\Phi^{-1}(U))$. Ist $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ eine quasiaffine Varietät, so ist eine Abbildung $\Phi : X \longrightarrow Y$ genau dann ein Morphismus, wenn die Koordinatenfunktionen von Φ reguläre Funktionen von X sind. Ist $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ eine quasiprojektive Varietät, so ist Φ genau dann ein Morphismus, wenn sie lokal reguläre Funktionen von X sind. Ein Morphismus heißt über K definiert, wenn für jede über K definierte reguläre Funktion f einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ die reguläre Funktion $f \circ \Phi$ wieder über K definiert ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Koordinatenfunktionen über K definiert sind.
Ein Morphismus $\Phi : X \longrightarrow Y$ induziert einen $\overline{k}$-Algebrahomomorphismus

$$\Phi^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X); f \longmapsto \Phi^*(f) := f \circ \Phi.$$

Ist Φ über K definiert, so wird ein K-Algebrahomomorphismus

$$\Phi_K^* : \mathcal{O}_K(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_K(X); f \longmapsto \Phi_K^*(f) := f \circ \Phi$$

induziert.

A.2 Birationale Korrespondenzen

Seien im folgenden alle auftretenden lokal abgeschlossenen Mengen nichtleer. Sei X/k lokal abgeschlossen. Betrachte auf der Menge

$$\mathcal{R} := \left\{ (U, f_U) \;\middle|\; U \subseteq X \text{ offen und nichtleer }, f_U \in \mathcal{O}(U) \right\}$$

die Äquivalenzrelation

$$(U, f_U) \sim (V, f_V) \;:\Longleftrightarrow\; U \cap V \neq \emptyset \wedge f_{U|_{U\cap V}} = f_{V|_{U\cap V}}\,.$$

Bezeichne die Äquivalenzklasse von (U, f_U) mit $\langle U, f_U \rangle$. Gilt $U \cap V \neq \emptyset$, so sind auf den Klassen die Verknüpfungen

$$\langle U, f_U \rangle + \langle V, f_V \rangle := \langle W, f_{U|_W} + f_{V|_W} \rangle \text{ und}$$
$$\langle U, f_U \rangle \langle V, f_V \rangle := \langle W, f_{U|_W} \cdot f_{V|_W} \rangle$$

mit $W := U \cap V$ definiert. In den folgenden Definitionen ist die Bedingung $U \cap V \neq \emptyset$ für alle auftretenden offenen Teilmengen erfüllt.

Definition (Funktionskeime, lokale Ringe). Sei X/k lokal abgeschlossen und $p \in X$. Die Menge

$$\mathcal{O}_{X,p} := \left\{ \langle U, f_U \rangle \in \mathcal{R}/\sim \;\middle|\; p \in U \right\}.$$

ist ein Ring, der *lokale Ring* von X in p. Die Elemente von $\mathcal{O}_{X,p}$ werden auch *Funktionskeime* genannt.

Definition (rationale Funktionen, Funktionenkörper). Sei X/k lokal abgeschlossen und irreduzibel. Die Menge

$$\overline{k}\,(X) := \mathcal{R}/\sim$$

ist mit obigen Verknüpfungen ein Körper, der *Funktionenkörper* von X. Die Elemente von $\overline{k}\,(X)$ heißen auch *rationalen Funktionen* auf X. Ist $\langle U, f_U \rangle \in \overline{k}\,(X)$ und ist f_U nicht die Nullfunktion auf U, so ist $\mathrm{Z}(f_U) \subseteq U$ abgeschlossen in U, und $W := U - \mathrm{Z}(f_U)$ ist offen und nichtleer. Das Inverse zu $\langle U, f_U \rangle$ ist dann $\langle W, f_{U|W}^{-1} \rangle$ mit $f_{U|W}^{-1}(p) := 1/f_U(p)$ für $p \in W$.

Diese Begriffsbildungen lassen sich auch übertragen auf den Fall, daß man nur über K definierte reguläre Funktionen betrachtet. So ist für einen Zwischenkörper $\overline{k}\,/K/k$:

$$K(X) := \left\{ \langle U, f_U \rangle \in \mathcal{R}/\sim \;\middle|\; f_U \in \mathcal{O}_K(U) \right\}.$$

Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X, so gilt

$$K(U) \cong K(X),$$

denn die Abbildung

$$\phi : K(U) \longrightarrow K(X);\ \langle V, f_V \rangle \longmapsto \langle V, f_V \rangle$$

ist ein wohldefinierter Körpermonomorphismus. Sei $\langle V, f_V \rangle \in K(X)$. Dann ist $\langle V \cap U, f_{V|V\cap U} \rangle \in K(U)$, und es ist $\phi(\langle V \cap U, f_{V|V\cap U} \rangle) = \langle V, f_V \rangle$.

Definition. Seien X/k und Y/k lokal abgeschlossen und irreduzibel.

i) Eine *rationale Abbildung* $T : X \longrightarrow Y$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, T_U) mit

$$U \subseteq X \text{ offen },$$
$$T_U : U \longrightarrow Y \text{ Morphismus}$$

zu der Relation

$$(U, T_U) \sim (V, T_V) :\Longleftrightarrow T_{U|U\cap V} = T_{V|U\cap V} .$$

T heißt über K definiert, wenn für ein $(U, T_U) \in T$ der Morphismus T_U über K definiert ist.

ii) T heißt *dominant*, wenn $T_U(U)$ dicht in Y liegt für ein $(U, T_U) \in T$.

iii) T heißt *birational*, wenn T invertierbar ist als rationale Abbildung, d. h. wenn es eine rationale Abbildung $T' : Y \longrightarrow X$ gibt, so daß für ein $(U, T_U) \in T$ und ein $(V, T'_V) \in T'$ mit $W := U \cap T_U^{-1}(V)$ und $W' := V \cap {T'_V}^{-1}(U)$ gilt

$$T'_V \circ T_{U|W} = \mathrm{id}_{X|W} \quad \text{und} \quad T_U \circ T'_{V|W'} = \mathrm{id}_{Y|W'} .$$

Ist T birational, so heißen X und Y *birational äquivalent*.

iv) Die *Fundamentalpunkte* von T sind die Elemente der Menge

$$X - U_{\mathrm{Def}}$$

mit

$$U_{\mathrm{Def}} := \varinjlim \left\{ U \subseteq X \text{ offen und nichtleer} \;\middle|\; (U, T_U) \in T \right\} .$$

v) Sei $(U, T_U) \in T$ und $\Gamma_0 \subseteq U \times Y$ der Graph von T_U. Der *Graph* von T sei dann

$$\Gamma := \overline{\Gamma}_0 \subseteq X \times Y.$$

Daß Γ wohldefiniert ist, folgt aus der Irreduzibilität von X und Y. Bezeichne mit p_1 und p_2 die Projektionen von Γ auf die erste bzw. zweite Komponente. Sei $Z \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann heißt die Menge

$$T(Z) := p_2 \circ p_1^{-1}(Z)$$

die *totale Transformierte* von Z unter T.

Ist die rationale Abbildung $T : X \longrightarrow Y$ dominant, so induziert sie einen injektiven Ringhomomorphismus

$$T^* : \overline{k}(Y) \longrightarrow \overline{k}(X);\ \langle V, f_V \rangle \longmapsto \langle W, f_V \circ T_{U|W} \rangle$$

mit $\langle U, T_U \rangle \in T$ und $W := U \cap T_U^{-1}(V)$. Ist T über K definiert, so hat man entsprechend

$$T_K^* : K(Y) \longrightarrow K(X)\ .$$

Ist T birational, so ist T^* ein Isomorphismus. T ist genau dann birational, wenn es nichtleere offene Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ gibt, die isomorph sind. Ist X birational äquivalent zu einem affinen Raum, so heißt X *rational*. Ist X rational und T über K definiert, so ist der Funktionenkörper $K(X)$ eine rein transzendente Körpererweiterung von K. Rein transzendente Erweiterungen werden auch *rational* genannt.
Sei X lokal abgeschlossen und $p \in X$. X heißt *normal* in p, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ ganzabgeschlossen ist. X heißt normal, wenn jeder Punkt von X normal ist.

Bemerkung A.1. Für $p \in X$ gilt

$$p \text{ regulär} \implies p \text{ normal.}$$

Beweis. Brodmann [7], Korollar 13.22 (S. 201). □

Satz A.2 (Hauptsatz von Zariski). *Sei $T : Y \longrightarrow X$ eine birationale Abbildung von irreduziblen projektiven Varietäten, von denen Y normal ist. Ist $p \in Y$ ein Fundamentalpunkt von T, so ist die totale Transformierte $T(p)$ zusammenhängend und von Dimension ≥ 1.*

Beweis. Hartshorne [15], S. 410. □

Korollar A.3. *Ist $T : X \longrightarrow Y$ ein birationaler, injektiver Morphismus von projektiven, irreduziblen Varietäten, von denen Y normal ist, so ist T ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\langle U, T_U \rangle \in T$ mit einem Isomorphismus $T_U : U \longrightarrow V$ und U maximal, d. h. $U = U_{\mathrm{Def}}$. Dann ist $U = X$, da T ein Morphismus ist. Angenommen, es wäre $V \neq Y$. Dann gäbe es einen Fundamentalpunkt $p \in Y$ und die totale Transformierte $T^{-1}(p)$ hätte nach dem Hauptsatz von Zariski Dimension größer als Null. Da T aber injektiv ist, kann sie nur aus einem Punkt bestehen.

□

Proposition A.4. *Seien X/k und Y/k quasiprojektive Varietäten. Bezeichne $p : X \times Y \longrightarrow X$ die Projektion auf die erste Komponente. Ist Y rational, so ist auch $K(X \times Y)/p_K^* K(X)$ rational für jeden Zwischenkörper $\overline{k}\,/K/k$.*

Beweis. Die Projektion p ist surjektiv, insbesondere also dominant. Sei o. E. $X = \mathrm{Z}(T) \subseteq \mathbf{A}^m$ affin, $T = I_X \subseteq \overline{k}[\mathbf{t}]$, und sei o. E. $Y = \mathbf{A}^r$. Dann ist $\overline{k}[Y] = \overline{k}[u_1, \ldots, u_r] =: \overline{k}[\mathbf{u}]$ und $\overline{k}[X \times Y] \cong \overline{k}[X] \times \overline{k}[Y] \cong \overline{k}[X][\mathbf{u}]$ und

$$\begin{aligned}\overline{k}(X \times Y) &= \mathrm{Quot}(\overline{k}[X] \times \overline{k}[\mathbf{u}]) \cong \mathrm{Quot}(\overline{k}[X][\mathbf{u}]) = \big(\mathrm{Quot}\,\overline{k}[X]\big)(\mathbf{u}) \\ &= \overline{k}(X)(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

□

A.3 Algebraische Gruppen und Quotienten von Varietäten

Definition (Algebraische Gruppe). Ist G eine Varietät mit einer Gruppenstruktur, so heißt G *algebraische Gruppe*, wenn die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G; (x, y) \longmapsto xy \quad \text{und} \\ G &\longrightarrow G; x \longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

Morphismen sind.

Definition (Geometrische Operation). Ist G eine algebraische Gruppe und X eine Varietät, so daß G als abstrakte Gruppe auf X als Menge durch

$$o : G \times X \longrightarrow X$$

operiert, so heißt diese Operation *geometrisch*, falls o ein Morphismus von Varietäten ist. Diese Operation wird häufig

$${}^{\sigma}p := o(\sigma, p) \quad \text{oder auch} \quad \sigma(p) := o(\sigma, p)$$

geschrieben.

Satz A.5. *Sei G eine algebraische Gruppe und $X \neq \emptyset$ eine Varietät, auf der G geometrisch operiert. Dann gilt:*

i) Jede Bahn von G auf X ist glatt.

ii) Ist G zusammenhängend, so stabilisiert G jede Zusammenhangskomponente von X.

Beweis. Humphreys [18], S. 59f. □

Satz A.6. *Sei $\phi : X \longrightarrow Y$ ein dominanter, injektiver Morphismus von irreduziblen Varietäten. Dann ist $\overline{k}(X)/\phi^*(\overline{k}(Y))$ eine endliche, rein inseparable Erweiterung.*

Beweis. Humphreys [18], S. 35. □

Definition (Quotienten von Varietäten).
Operiert die algebraische Gruppe G auf der Varietät V geometrisch, so ist die Menge

$$V/G := \{Gp \mid p \in V\} \quad \text{mit } Gp := \{\,{}^{\sigma}p \mid \sigma \in G\}$$

der Bahnenraum (oder der algebraische Quotient) von V nach G. Definiere als induzierte Mengen die $\overline{k}$-Algebra der regulären Funktionen und den lokalen Ring von V nach G durch

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(V/G) := \mathcal{O}(V)^G = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f({}^{\sigma}p) = f(p) \text{ für alle } p \in V, \sigma \in G\},\\
&\mathcal{O}_{V/G,p} := (\mathcal{O}_{V,p})^G\\
&= \{\langle U, f_U\rangle \in \mathcal{O}_{V,p} \mid f_U({}^{\sigma}p) = f_U(p) \text{ für alle } p \in U, \sigma \in G \text{ mit } {}^{\sigma}p \in U\}.
\end{aligned}$$

Eine Varietät W heißt *(geometrischer) Quotient* von V nach G, in Zeichen $V/G \cong W$, wenn es einen surjektiven Morphismus $\Psi : V \longrightarrow W$ gibt, so daß gilt

i) $\Psi({}^{\sigma}p) = \Psi(p)$ für alle $p \in V$ und $\sigma \in G$.

ii) $\mathcal{O}_{V/G,p} \subseteq \Psi^*\mathcal{O}_{W,\Psi(p)}$ für alle $p \in V$.

Bemerkung A.7. Bedingung ii) aus obiger Definition ist erfüllt, wenn es einen Morphismus $s : W \longrightarrow V$ mit $s \circ \Psi = \mathrm{id}$ gibt, so daß die induzierte Abbildung

$$W \longrightarrow V \longrightarrow V/G$$

surjektiv ist. Ist nämlich $f \in \mathcal{O}_{V/G,p}$, so ist $f \circ s \in \mathcal{O}_{W,\Psi(p)}$ und $\Psi^*(f \circ s) = f \circ s \circ \Psi = f$. Ist W Quotient von V nach G, so ist $\mathcal{O}_{V/G,p} = \Psi^*\mathcal{O}_{W,\Psi(p)}$ für alle $p \in V$.

Anhang B

Bahnstruktur

In diesem Abschnitt soll die Frage nach der Bahnstruktur allgemein betrachtet werden, d. h. es operiert eine Gruppe auf der Menge ihrer Teilmengen einer bestimmten Ordnung, und es wird nach der Anzahl der Bahnen einer bestimmten Länge gefragt.
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und $1 \leq d \leq n$ eine Zahl. Sei in diesem Abschnitt vereinfachend

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{d,G} &:= \Big\{ M \subseteq G \;\Big|\; |M| = d \Big\}, \\
M\sigma &:= \{\sigma_1\sigma, \ldots, \sigma_d\sigma\} \;\text{ für } \sigma \in G, M = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\} \in \mathcal{M}_{d,G}, \\
B(M) &:= \Big\{ M\sigma \;\Big|\; \sigma \in G \Big\}, \\
G_M &:= \Big\{ \sigma \in G \;\Big|\; M\sigma = M \Big\}.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man mit

$$\eta_b := \#\Big\{ B(M) \;\Big|\; M \in \mathcal{M}_{d,G} \text{ mit } |B(M)| = b \Big\}$$

die Anzahl der Bahnen der Länge b, so erhält man aus der Bahnengleichung

$$|G_M||B(M)| = |G|$$

folgende Aussage:

Lemma B.1. $\eta_b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad b|n$ *und* $n|db$.

Beweis. Da $\eta_b \neq 0$ ist, gibt es eine Teilmenge $M \in \mathcal{M}_{d,G}$ mit $|B(M)| = b$, die die Bahnengleichung erfüllt, so daß $|G_M|b = n$ folgt, also $b|n$. Außerdem operiert G_M treu auf den Elementen von M und so zerfällt M:

$$M = \dot{\bigcup_i} \sigma_i G_M. \tag{$*$}$$

Aus $|G_M|\big|d$ und $|G_M| = \frac{n}{b}$ folgt $n|db$. $\square$

Falls also $b \not| \; n$ oder $n \not| \; db$, so ist $\eta_b = 0$. Betrachte nun eine feste Untergruppe $U \leq G$ vom Index b, so daß $n|db$. Dann gilt für alle

$$M = \dot{\bigcup_i} \sigma_i U \in \mathcal{M}_{d,G} \quad \text{mit } \sigma_i U \in G/U,$$

daß U eine Untergruppe des Stabilisators G_M ist. Bezeichnet man mit

$$\eta_U := \#\Big\{M \in \mathcal{M}_{d,G} \;\Big|\; G_M = U\Big\}$$

die Anzahl der Teilmengen, deren Stabilisator genau U ist, so ergibt sich

Satz B.2.

i) $$\eta_U = \binom{\frac{n}{|U|}}{\frac{d}{|U|}} - \sum_{\substack{U \leq V \leq G \\ U \neq V \\ |V|\,|d}} \eta_V \ ,$$

ii) $$\eta_b = \frac{1}{b} \sum_{\substack{U \leq G \\ |U| = \frac{n}{b}}} \eta_U \ .$$

Beweis. i) Jede Wahl von $\frac{d}{|U|}$ Klassen $\sigma_i U$ aus $\frac{n}{|U|}$ möglichen von G/U ergibt eine Teilmenge $M = \dot{\cup} \sigma_i U$, deren Stabilisator U enthält. G_M kann aber auch größer als U sei, deshalb muß die Anzahl der Teilmengen mit echt größeren Stabilisatoren wieder abgezogen werden. So entsteht die angegebene Rekursionsformel.
ii) Die Teilmengen mit Bahnlänge b haben einen Stabilisator der Ordnung $\frac{n}{b}$. Die Summe $\sum \eta_U$ über alle Untergruppen U der Ordnung $\frac{n}{d}$ liefert die Anzahl aller Teilmengen mit Bahnlänge b, und durch b geteilt ergibt sich die Anzahl der Bahnen. $\square$

Korollar B.3.

i) $$\sum_b b\,\eta_b = \binom{n}{d} \ ,$$

ii) Für $d = \frac{n}{b}$ ist η_b die Anzahl der Untergruppen von G der Ordnung d.

Beweis. i) Es gibt $\binom{n}{d}$ d-elementige Teilmengen von G und jede ist in genau einer Bahn enthalten.
ii) Ist $|B(M)| = b$, so hat der Stabilisator G_M die Ordnung $\frac{n}{b}$. Ist diese gleich d, so wird aus der Zerlegung $(*)$ im Beweis von Lemma B.1 $M = \sigma G_M$, d. h. in jeder Bahn ist genau eine Untergruppe enthalten. $\square$

Anhang C

Reduzierte Plücker-Relationen für Symbolalgebren vom Grad 3

Sei ξ eine primitive dritte Einheitswurzel, die im Grundkörper k enthalten ist. Seien $a, b \in k^*$ Skalare und A die Symbolalgebra

$$
\begin{aligned}
A :=& \left(\frac{a, b}{k, \xi}\right) \\
=& \left\langle x, y \mid x^3 = a, y^3 = b, yx = \xi xy \right\rangle_k .
\end{aligned}
$$

Sei $G := \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$. Schreibe die Gruppe G wie bisher multiplikativ, obwohl die natürliche Verknüpfung die Addition modulo d wäre. Bezeichne für ein Gruppenelement $\sigma \in \mathbb{Z}_d$ mit $\underline{\sigma}$ den Repräsentanten von σ aus $\{0, \dots, d-1\}$. A läßt sich als Gruppenalgebra der Gruppe G schreiben:[117]

$$A = \bigoplus_{(i,j) \in G} e_{(i,j)} k$$

mit $e_{(i,j)} := x^{\underline{i}} y^{\underline{j}}$ und

$$e_\sigma e_\tau = s_{\sigma,\tau} e_{\sigma\tau}.$$

Dabei ist $s : G \times G \longrightarrow k^*; (\sigma, \tau) \mapsto s_{\sigma,\tau}$ ein 2-Kozykel, dessen Klasse aus $\mathrm{H}^2(G, k^*)$ ist.

[117]Siehe Abschnitt 6.3.

Im Fall $d = 3$ erhält man als Werte des Kozykels $s_{\sigma,\tau}$:

σ	τ : 0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	a	1	1	a	1	1	a
2	1	a	a	1	a	a	1	a	a
3	1	ξ	ξ^2	1	ξ	ξ^2	b	$b\xi$	$b\xi^2$
4	1	ξ	$a\xi^2$	1	ξ	$a\xi^2$	b	$b\xi$	$ab\xi^2$
5	1	$a\xi$	$a\xi^2$	1	$a\xi$	$a\xi^2$	b	$ab\xi$	$ab\xi^2$
6	1	ξ^2	ξ	b	$b\xi^2$	$b\xi$	b	$b\xi^2$	$b\xi$
7	1	ξ^2	$a\xi$	b	$b\xi^2$	$ab\xi$	b	$b\xi^2$	$ab\xi$
8	1	$a\xi^2$	$a\xi$	b	$ab\xi^2$	$ab\xi$	b	$ab\xi^2$	$ab\xi$

Tabelle mit Daten für die Gleichungen $x_M = D(M)x_{\Pi(M)}$ mit $M = \sigma\Pi(M)$:

M	$\Pi(M)$	σ	$s_\sigma(\Pi(M))$	$\mathrm{Nred}\, e_\sigma$	$D(M)$
012	012	0	1	1	1
013	013	0	1	1	1
014	014	0	1	1	1
015	015	0	1	1	1
016	016	0	1	1	1
017	017	0	1	1	1
018	018	0	1	1	1
023	014	2	$-a^2$	a^2	-1
024	015	2	$-a^2$	a^2	-1
025	013	2	$-a$	a^2	$-a^{-1}$
026	017	2	$-a^2$	a^2	-1
027	018	2	$-a^2$	a^2	-1
028	016	2	$-a$	a^2	$-a^{-1}$
034	016	3	ξb	b	ξ
035	017	5	$-\xi^2 a^2 b$	$a^2 b$	$-\xi^2$
036	036	0	1	1	1
037	037	0	1	1	1
038	038	0	1	1	1
045	018	4	ab	ab	1
046	037	6	$\xi^2 b^2$	b^2	ξ^2
047	038	4	$\xi^2 ab$	ab	ξ^2
048	048	0	1	1	1
056	038	6	ξb^2	b^2	ξ
057	057	0	1	1	1
058	037	5	ξab	$a^2 b$	ξa^{-1}
067	013	6	$\xi^2 b$	b^2	$\xi^2 b^{-1}$
068	014	8	$-\xi a^2 b$	$a^2 b^2$	$-\xi b^{-1}$
078	015	7	ab	ab^2	b^{-1}
123	015	1	a	a	1
124	013	1	1	a	a^{-1}
125	014	1	1	a	a^{-1}
126	018	1	a	a	1
127	016	1	1	a	a^{-1}
128	017	1	1	a	a^{-1}
134	017	3	$\xi^2 b$	b	ξ^2
135	018	5	$-a^2 b$	$a^2 b$	-1
136	037	3	ξb	b	ξ
137	038	7	ξab^2	ab^2	ξ
138	057	1	a	a	1
145	016	4	ξb	ab	ξa^{-1}
146	038	1	a	a	1
147	036	1	1	a	a^{-1}

M	$\Pi(M)$	σ	$s_\sigma(\Pi(M))$	$\mathrm{Nred}\, e_\sigma$	$D(M)$
148	037	1	1	a	a^{-1}
156	048	1	a	a	1
157	037	7	$\xi^2 b^2$	ab^2	$\xi^2 a^{-1}$
158	038	5	$\xi^2 ab$	$a^2 b$	$\xi^2 a^{-1}$
167	014	6	ξb	b^2	ξb^{-1}
168	015	8	$-a^2 b$	$a^2 b^2$	$-b^{-1}$
178	013	7	$\xi^2 b$	ab^2	$\xi^2 a^{-1} b^{-1}$
234	018	3	b	b	1
235	016	5	$\xi - ab$	$a^2 b$	$-\xi a^{-1}$
236	038	3	$\xi^2 b$	b	ξ^2
237	048	2	a^2	a^2	1
238	037	8	$\xi^2 ab^2$	$a^2 b^2$	$\xi^2 a^{-1}$
245	017	4	$\xi^2 b$	ab	$\xi^2 a^{-1}$
246	057	2	a^2	a^2	1
247	037	4	ξb	ab	ξa^{-1}
248	038	8	ξab^2	$a^2 b^2$	ξa^{-1}
256	037	2	a	a^2	a^{-1}
257	038	2	a	a^2	a^{-1}
258	036	2	1	a^2	a^{-2}
267	015	6	b	b^2	b^{-1}
268	013	8	$-\xi^2 ab$	$a^2 b^2$	$-\xi^2 a^{-1} b^{-1}$
278	014	7	ξb	ab^2	$\xi a^{-1} b^{-1}$
345	012	3	1	b	b^{-1}
346	013	3	ξ	b	ξb^{-1}
347	014	3	ξ^2	b	$\xi^2 b^{-1}$
348	015	3	1	b	b^{-1}
356	014	5	$-\xi^2 a^2$	$a^2 b$	$-\xi^2 b^{-1}$
357	015	5	$-a^2$	$a^2 b$	$-b^{-1}$
358	013	5	$-\xi a$	$a^2 b$	$-\xi a^{-1} b^{-1}$
367	016	6	$\xi^2 b$	b^2	$\xi^2 b^{-1}$
368	017	8	$-\xi a^2 b$	$a^2 b^2$	$-\xi b^{-1}$
378	018	7	ab	ab^2	b^{-1}
456	015	4	a	ab	b^{-1}
457	013	4	ξ	ab	$\xi a^{-1} b^{-1}$
458	014	4	ξ^2	ab	$\xi^2 a^{-1} b^{-1}$
467	017	6	ξb	b^2	ξb^{-1}
468	018	8	$-a^2 b$	$a^2 b^2$	$-b^{-1}$
478	016	7	$\xi^2 b$	ab^2	$\xi^2 a^{-1} b^{-1}$
567	018	6	b	b^2	b^{-1}
568	016	8	$-\xi^2 ab$	$a^2 b^2$	$-\xi^2 a^{-1} b^{-1}$
578	017	7	ξb	ab^2	$\xi a^{-1} b^{-1}$
678	012	6	1	b^2	b^{-2}

Es folgt eine Liste mit den reduzierten Plücker-Relationen: Per Computer[118] wurden in den $36 \cdot 126 = 4536$ Plücker-Relationen die Koordinaten nach obigen Relationen ersetzt. Dabei wurde für die Repräsentanten abkürzend folgende Schreibweise verwendet:

$$\begin{array}{llllll} x_0 := x_{013} & x_1 := x_{014} & x_2 := x_{015} & x_3 := x_{016} & x_4 := x_{017} & x_5 := x_{018} \\ x_6 := x_{037} & x_7 := x_{038} & x_8 := x_{012} & x_9 := x_{036} & x_{10} := x_{048} & x_{11} := x_{057} \end{array}$$

Durch die Ersetzung wurden viele Relationen gleich, es bleiben 138 verschiedene übrig. Diese wurden aus rechentechnischen Gründen mit Faktoren λ normiert:

M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
01	0234	$x_1^2 - x_0x_2 - \xi x_3x_8$
01	0235	$x_0^2 - ax_1x_2 - a\xi^2 x_4x_8$
01	0236	$x_1x_3 - x_0x_4 - x_8x_9$
01	0237	$x_1x_4 - x_0x_5 - x_6x_8$
01	0238	$x_0x_3 - ax_1x_5 + ax_7x_8$
01	0245	$x_0x_1 - ax_2^2 + ax_5x_8$
01	0246	$x_2x_3 - x_1x_4 - \xi^2 x_6x_8$
01	0247	$x_2x_4 - x_1x_5 - \xi^2 x_7x_8$
01	0248	$x_1x_3 - ax_2x_5 + ax_8x_{10}$
01	0256	$x_0x_3 - ax_2x_4 - a\xi x_7x_8$
01	0257	$x_0x_4 - ax_2x_5 - ax_8x_{11}$
01	0258	$x_2x_3 - x_0x_5 + \xi x_6x_8$
01	0267	$bx_4^2 - bx_3x_5 - \xi^2 x_0x_8$
01	0268	$bx_3^2 - abx_4x_5 - a\xi x_1x_8$
01	0278	$bx_3x_4 - abx_5^2 + ax_2x_8$
01	0345	$x_2x_3 + \xi x_1x_4 + \xi^2 x_0x_5$
01	0346	$x_3^2 + \xi x_0x_6 - \xi^2 x_1x_9$
01	0347	$x_3x_4 - \xi^2 x_1x_6 + \xi x_0x_7$
01	0348	$x_3x_5 - \xi^2 x_1x_7 + \xi^2 x_0x_{10}$
01	0356	$x_3x_4 - \xi^2 x_0x_7 + \xi x_2x_9$
01	0357	$x_4^2 + \xi x_2x_6 - \xi x_0x_{11}$
01	0358	$ax_4x_5 - \xi^2 x_0x_6 + a\xi x_2x_7$
01	0367	$x_0^2 - b\xi x_3x_6 + b\xi x_4x_9$

[118] Es wurde das Computeralgebra-Programm Mathematica V2.2 verwendet.

M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
01	0368	$x_0x_1 + b\xi^2x_3x_7 - b\xi^2x_5x_9$
01	0378	$x_0x_2 + bx_5x_6 - bx_4x_7$
01	0456	$x_3x_5 - \xi^2x_2x_6 + \xi x_1x_7$
01	0457	$x_4x_5 - \xi^2x_2x_7 + x_1x_{11}$
01	0458	$ax_5^2 + \xi x_1x_6 - ax_2x_{10}$
01	0467	$x_0x_1 + bx_4x_6 - bx_3x_7$
01	0468	$x_1^2 - b\xi x_5x_6 + b\xi^2x_3x_{10}$
01	0478	$x_1x_2 + b\xi^2x_5x_7 - bx_4x_{10}$
01	0567	$x_0x_2 + b\xi^2x_4x_7 - b\xi x_3x_{11}$
01	0568	$ax_1x_2 + bx_3x_6 - abx_5x_7$
01	0578	$ax_2^2 - b\xi x_4x_6 + abx_5x_{11}$
01	1345	$x_0x_3 + a\xi x_2x_4 + a\xi^2x_1x_5$
01	1347	$ax_4^2 - a\xi^2x_1x_7 + \xi x_0x_9$
01	1348	$ax_4x_5 + \xi x_0x_6 - a\xi x_1x_{11}$
01	1356	$x_3x_5 + \xi x_2x_6 - x_0x_{10}$
01	1358	$ax_5^2 - \xi^2x_0x_7 + ax_2x_{11}$
01	1368	$x_0x_2 - b\xi x_5x_6 + bx_3x_{11}$
01	1378	$x_0^2 + ab\xi^2x_5x_7 - ab\xi x_4x_{11}$
01	1456	$x_3^2 - a\xi^2x_2x_7 + a\xi^2x_1x_{10}$
01	1457	$x_3x_4 + \xi x_1x_6 - \xi^2x_2x_9$
01	1467	$ax_1^2 + ab\xi^2x_4x_7 - b\xi^2x_3x_9$
01	1478	$x_0x_1 - b\xi x_4x_6 + b\xi x_5x_9$
01	1567	$ax_1x_2 - b\xi x_3x_6 + ab\xi^2x_4x_{10}$
01	1568	$ax_2^2 + b\xi^2x_3x_7 - abx_5x_{10}$
01	2345	$bx_1x_3 + b\xi x_0x_4 + ab\xi^2x_2x_5 - a\xi^2x_8^2$
01	2346	$bx_3x_5 - b\xi^2x_1x_7 - \xi x_0x_8 + bx_0x_{11}$
01	2347	$abx_4x_5 + b\xi x_0x_6 - a\xi^2x_1x_8 - abx_1x_{10}$
01	2348	$abx_5^2 - b\xi^2x_1x_6 + b\xi x_0x_7 - ax_2x_8$
01	2356	$bx_3^2 - b\xi^2x_0x_6 + ab\xi x_2x_7 - a\xi x_1x_8$
01	2357	$bx_3x_4 - b\xi^2x_0x_7 - a\xi^2x_2x_8 + ab\xi^2x_2x_{10}$
01	2358	$abx_3x_5 + ab\xi x_2x_6 - ax_0x_8 - b\xi^2x_0x_9$
01	2367	$x_0x_2 + b\xi^2x_4x_7 - \xi^2x_3x_8 - bx_3x_{10}$
01	2368	$x_0^2 + bx_3x_6 - abx_5x_7 - a\xi^2x_4x_8$
01	2378	$x_0x_1 - b\xi x_4x_6 - a\xi^2x_5x_8 + ab\xi^2x_5x_{10}$
01	2456	$bx_3x_4 + b\xi x_1x_6 - a\xi x_2x_8 - ab\xi x_2x_{11}$
01	2457	$bx_4^2 - b\xi^2x_2x_6 + b\xi x_1x_7 - \xi^2x_0x_8$
01	2458	$abx_4x_5 - ab\xi^2x_2x_7 - ax_1x_8 + b\xi x_1x_9$
01	2467	$ax_1x_2 - b\xi x_3x_6 - a\xi x_4x_8 + abx_4x_{11}$
01	2468	$x_0x_1 + b\xi^2x_3x_7 - a\xi x_5x_8 - ab\xi x_5x_{11}$
01	2478	$x_1^2 + bx_5x_6 - bx_4x_7 - \xi x_3x_8$
01	2567	$ax_2^2 + bx_4x_6 - bx_3x_7 - ax_5x_8$
01	2568	$ax_0x_2 - ab\xi x_5x_6 - ax_3x_8 + b\xi x_3x_9$
01	2578	$ax_1x_2 + ab\xi^2x_5x_7 - ax_4x_8 - b\xi^2x_4x_9$
03	0456	$x_4x_6 + \xi x_3x_7 + \xi^2x_5x_9$
03	0457	$x_5x_6 + \xi x_4x_7 + \xi x_3x_{11}$
03	0458	$x_3x_6 + a\xi x_5x_7 + ax_4x_{10}$

M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
03	0467	$x_0x_3 + b\xi^2x_6^2 - b\xi^2x_7x_9$
03	0468	$x_1x_3 - bx_6x_7 + b\xi x_9x_{10}$
03	0478	$x_2x_3 + b\xi x_7^2 - b\xi^2x_6x_{10}$
03	0567	$x_0x_4 - bx_6x_7 + b\xi^2x_9x_{11}$
03	0568	$ax_1x_4 + ab\xi x_7^2 - b\xi x_6x_9$
03	0578	$ax_2x_4 + b\xi^2x_6^2 - ab\xi x_7x_{11}$
03	0678	$x_1x_6 + \xi x_0x_7 + \xi^2x_2x_9$
03	1237	$x_2x_6 + \xi x_1x_7 + x_0x_{10}$
03	1238	$x_0x_6 + a\xi x_2x_7 + a\xi x_1x_{11}$
03	1246	$ax_3x_5 - a\xi^2x_1x_7 - \xi^2x_0x_9 - a\xi^2x_0x_{11}$
03	1256	$ax_4x_5 + \xi x_0x_6 + \xi x_1x_9 + a\xi x_1x_{10}$
03	1267	$ax_1^2 + a\xi^2x_0x_2 + ab\xi^2x_5x_6 - b\xi^2x_3x_9$
03	1268	$x_0^2 + a\xi x_1x_2 - ab\xi x_5x_7 + b\xi x_4x_9$
03	1378	$x_0x_5 + b\xi x_7^2 - bx_6x_{11}$
03	1456	$ax_0x_2 + ab\xi^2x_4x_7 + b\xi x_3x_9 + ab\xi x_3x_{10}$
03	1467	$ax_1x_3 + a\xi^2x_0x_4 + ab\xi x_6x_7 - b\xi x_9^2$
03	1468	$ax_2x_3 + a\xi^2x_0x_5 - ab\xi^2x_7^2 + b\xi^2x_6x_9$
03	1567	$ax_1x_4 - ax_0x_5 + b\xi^2x_6x_9 - abx_6x_{10}$
03	1568	$x_0x_3 - ax_2x_4 + bx_7x_9 - ab\xi x_7x_{10}$
03	1678	$abx_2x_6 + ab\xi x_1x_7 + ax_0x_8 + b\xi^2x_0x_9$
03	2378	$ax_1x_5 + b\xi^2x_6^2 - abx_7x_{10}$
03	2456	$ax_1x_2 - b\xi x_3x_6 - b\xi^2x_4x_9 - ab\xi^2x_4x_{11}$
03	2467	$ax_2x_3 - ax_1x_4 - bx_6x_9 + ab\xi^2x_6x_{11}$
03	2468	$x_0x_3 - ax_1x_5 + b\xi x_7x_9 - abx_7x_{11}$
03	2567	$ax_2x_4 + a\xi x_1x_5 - b\xi x_6^2 + b\xi x_7x_9$
03	2678	$bx_0x_6 + ab\xi x_2x_7 - a\xi x_1x_8 + b\xi^2x_1x_9$
03	4567	$ax_4^2 + a\xi x_3x_5 - ax_2x_6 + \xi x_0x_9$
03	4568	$x_3^2 + a\xi^2x_4x_5 + ax_2x_7 - \xi^2x_1x_9$
03	4678	$abx_5x_6 + ab\xi x_4x_7 - a\xi x_3x_8 + b\xi^2x_3x_9$
03	5678	$bx_3x_6 + ab\xi x_5x_7 + ax_4x_8 + b\xi^2x_4x_9$
04	0578	$ax_2x_5 - bx_6x_7 + abx_{10}x_{11}$
04	1238	$x_3x_4 + \xi x_1x_6 + a\xi^2x_2x_{10} + a\xi^2x_2x_{11}$
04	1258	$ax_4x_5 - a\xi^2x_2x_7 - x_1x_9 - ax_1x_{10}$
04	1268	$x_0x_1 + a\xi x_2^2 + bx_4x_6 - ab\xi x_5x_{10}$
04	1278	$x_1^2 + \xi x_0x_2 - b\xi x_4x_7 + b\xi^2x_3x_{10}$
04	1358	$x_0x_1 + b\xi^2x_3x_7 + ab\xi^2x_5x_{10} + ab\xi^2x_5x_{11}$
04	1368	$x_2x_3 - x_1x_4 + bx_6x_{10} - b\xi x_6x_{11}$
04	1378	$x_0x_3 - ax_1x_5 - ab\xi x_7x_{10} + ab\xi^2x_7x_{11}$
04	1568	$x_1x_3 + a\xi x_2x_5 + b\xi^2x_6x_7 - ab\xi x_{10}^2$
04	1578	$x_1x_4 + \xi x_0x_5 - bx_7^2 + b\xi x_6x_{10}$
04	1678	$bx_0x_6 + ab\xi x_2x_7 + a\xi^2x_1x_8 + abx_1x_{10}$
04	2358	$ax_0x_2 - ab\xi x_5x_6 - bx_3x_9 - abx_3x_{10}$
04	2368	$x_0x_3 + a\xi x_2x_4 - b\xi x_6^2 + ab\xi^2x_7x_{10}$
04	2568	$ax_2x_3 - ax_0x_5 - bx_6x_9 + ab\xi x_6x_{10}$
04	2578	$ax_2x_4 - ax_1x_5 + b\xi x_7x_9 - ab\xi^2x_7x_{10}$
04	2678	$bx_1x_6 + b\xi x_0x_7 - ax_2x_8 + abx_2x_{10}$

M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
04	3568	$x_3^2 + a\xi x_4 x_5 - x_0 x_6 + a\xi^2 x_1 x_{10}$
04	3578	$x_3 x_4 + a\xi x_5^2 + \xi x_0 x_7 - a\xi x_2 x_{10}$
04	3678	$bx_5 x_6 + b\xi x_4 x_7 + \xi^2 x_3 x_8 + bx_3 x_{10}$
04	5678	$bx_4 x_6 + b\xi x_3 x_7 - ax_5 x_8 + abx_5 x_{10}$
05	1237	$x_3 x_4 - \xi^2 x_0 x_7 - a\xi x_2 x_{10} - a\xi x_2 x_{11}$
05	1247	$ax_3 x_5 + a\xi x_2 x_6 + x_0 x_9 + ax_0 x_{11}$
05	1267	$x_0 x_1 + a\xi^2 x_2^2 - bx_3 x_7 + ab\xi^2 x_5 x_{11}$
05	1278	$x_0^2 + a\xi^2 x_1 x_2 + b\xi^2 x_3 x_6 - ab\xi x_4 x_{11}$
05	1347	$ax_1 x_2 + ab\xi^2 x_5 x_7 + bx_4 x_9 + abx_4 x_{11}$
05	1367	$x_2 x_3 + \xi x_1 x_4 - bx_7^2 + b\xi^2 x_6 x_{11}$
05	1378	$x_0 x_4 + a\xi^2 x_2 x_5 + b\xi x_6 x_7 - ab\xi^2 x_{11}^2$
05	1467	$ax_2 x_4 - ax_1 x_5 - bx_7 x_9 + ab\xi^2 x_7 x_{11}$
05	1478	$ax_2 x_3 - ax_0 x_5 + b\xi^2 x_6 x_9 - ab\xi x_6 x_{11}$
05	1678	$bx_1 x_6 + b\xi x_0 x_7 + a\xi x_2 x_8 + ab\xi x_2 x_{11}$
05	2347	$x_0 x_1 - b\xi x_4 x_6 - ab\xi x_5 x_{10} - ab\xi x_5 x_{11}$
05	2367	$x_0 x_3 - ax_2 x_4 + ab\xi^2 x_7 x_{10} - abx_7 x_{11}$
05	2378	$x_1 x_4 - x_0 x_5 + b\xi x_6 x_{10} - b\xi^2 x_6 x_{11}$
05	2478	$x_0 x_3 + a\xi^2 x_1 x_5 - bx_6^2 + ab\xi^2 x_7 x_{11}$
05	2678	$bx_2 x_6 + b\xi x_1 x_7 - \xi^2 x_0 x_8 + b\xi x_0 x_{11}$
05	3467	$x_4^2 + \xi^2 x_3 x_5 + x_1 x_7 - \xi x_0 x_{11}$
05	3478	$x_3 x_4 + a\xi^2 x_5^2 - \xi^2 x_1 x_6 + a\xi^2 x_2 x_{11}$
05	3678	$bx_3 x_6 + ab\xi x_5 x_7 - a\xi^2 x_4 x_8 + ab\xi x_4 x_{11}$
05	4678	$bx_4 x_6 + b\xi x_3 x_7 + a\xi x_5 x_8 + ab\xi x_5 x_{11}$

Auf der Suche nach Beziehungen zwischen den Koordinaten war es hilfreich, eine nach den in den Gleichungen auftretenden Variablen sortierte Liste, wie die folgende, vorliegen zu haben.

Variablen			M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
x_0^2	x_1x_2	x_4x_8	01	0235	$x_0^2 - ax_1x_2 - a\xi^2x_4x_8$
x_0^2	x_3x_6	x_4x_9	01	0367	$x_0^2 - b\xi x_3x_6 + b\xi x_4x_9$
x_0^2	x_5x_7	x_4x_{11}	01	1378	$x_0^2 + ab\xi^2x_5x_7 - ab\xi x_4x_{11}$
x_0x_1	x_2^2	x_5x_8	01	0245	$x_0x_1 - ax_2^2 + ax_5x_8$
x_0x_1	x_4x_6	x_3x_7	01	0467	$x_0x_1 + bx_4x_6 - bx_3x_7$
x_0x_1	x_4x_6	x_5x_9	01	1478	$x_0x_1 - b\xi x_4x_6 + b\xi x_5x_9$
x_0x_1	x_3x_7	x_5x_9	01	0368	$x_0x_1 + b\xi^2x_3x_7 - b\xi^2x_5x_9$
x_1^2	x_0x_2	x_3x_8	01	0234	$x_1^2 - x_0x_2 - \xi x_3x_8$
x_1^2	x_5x_6	x_3x_{10}	01	0468	$x_1^2 - b\xi x_5x_6 + b\xi^2x_3x_{10}$
x_1^2	x_4x_7	x_3x_9	01	1467	$ax_1^2 + ab\xi^2x_4x_7 - b\xi^2x_3x_9$
x_0x_2	x_5x_6	x_4x_7	01	0378	$x_0x_2 + bx_5x_6 - bx_4x_7$
x_0x_2	x_5x_6	x_3x_{11}	01	1368	$x_0x_2 - b\xi x_5x_6 + bx_3x_{11}$
x_0x_2	x_4x_7	x_3x_{11}	01	0567	$x_0x_2 + b\xi^2x_4x_7 - b\xi x_3x_{11}$
x_1x_2	x_3x_6	x_5x_7	01	0568	$ax_1x_2 + bx_3x_6 - abx_5x_7$
x_1x_2	x_3x_6	x_4x_{10}	01	1567	$ax_1x_2 - b\xi x_3x_6 + ab\xi^2x_4x_{10}$
x_1x_2	x_5x_7	x_4x_{10}	01	0478	$x_1x_2 + b\xi^2x_5x_7 - bx_4x_{10}$
x_2^2	x_4x_6	x_5x_{11}	01	0578	$ax_2^2 - b\xi x_4x_6 + abx_5x_{11}$
x_2^2	x_3x_7	x_5x_{10}	01	1568	$ax_2^2 + b\xi^2x_3x_7 - abx_5x_{10}$
x_0x_3	x_2x_4	x_1x_5	01	1345	$x_0x_3 + a\xi x_2x_4 + a\xi^2x_1x_5$
x_0x_3	x_2x_4	x_7x_8	01	0256	$x_0x_3 - ax_2x_4 - a\xi x_7x_8$
x_0x_3	x_1x_5	x_7x_8	01	0238	$x_0x_3 - ax_1x_5 + ax_7x_8$
x_0x_3	x_6^2	x_7x_9	03	0467	$x_0x_3 + b\xi^2x_6^2 - b\xi^2x_7x_9$
x_1x_3	x_0x_4	x_8x_9	01	0236	$x_1x_3 - x_0x_4 - x_8x_9$
x_1x_3	x_2x_5	x_8x_{10}	01	0248	$x_1x_3 - ax_2x_5 + ax_8x_{10}$
x_1x_3	x_6x_7	x_9x_{10}	03	0468	$x_1x_3 - bx_6x_7 + b\xi x_9x_{10}$
x_2x_3	x_1x_4	x_0x_5	01	0345	$x_2x_3 + \xi x_1x_4 + \xi^2x_0x_5$
x_2x_3	x_1x_4	x_6x_8	01	0246	$x_2x_3 - x_1x_4 - \xi^2x_6x_8$
x_2x_3	x_0x_5	x_6x_8	01	0258	$x_2x_3 - x_0x_5 + \xi x_6x_8$
x_2x_3	x_7^2	x_6x_{10}	03	0478	$x_2x_3 + b\xi x_7^2 - b\xi^2x_6x_{10}$
x_3^2	x_4x_5	x_1x_8	01	0268	$bx_3^2 - abx_4x_5 - a\xi x_1x_8$
x_3^2	x_0x_6	x_1x_9	01	0346	$x_3^2 + \xi x_0x_6 - \xi^2x_1x_9$
x_3^2	x_2x_7	x_1x_{10}	01	1456	$x_3^2 - a\xi^2x_2x_7 + a\xi^2x_1x_{10}$
x_0x_4	x_2x_5	x_8x_{11}	01	0257	$x_0x_4 - ax_2x_5 - ax_8x_{11}$
x_0x_4	x_6x_7	x_9x_{11}	03	0567	$x_0x_4 - bx_6x_7 + b\xi^2x_9x_{11}$
x_1x_4	x_0x_5	x_6x_8	01	0237	$x_1x_4 - x_0x_5 - x_6x_8$
x_1x_4	x_7^2	x_6x_9	03	0568	$ax_1x_4 + ab\xi x_7^2 - b\xi x_6x_9$
x_2x_4	x_1x_5	x_7x_8	01	0247	$x_2x_4 - x_1x_5 - \xi^2x_7x_8$
x_2x_4	x_6^2	x_7x_{11}	03	0578	$ax_2x_4 + b\xi^2x_6^2 - ab\xi x_7x_{11}$
x_3x_4	x_5^2	x_2x_8	01	0278	$bx_3x_4 - abx_5^2 + ax_2x_8$
x_3x_4	x_1x_6	x_0x_7	01	0347	$x_3x_4 - \xi^2x_1x_6 + \xi x_0x_7$

Variablen				M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
	x_3x_4	x_1x_6	x_2x_9	01	1457	$x_3x_4+\xi x_1x_6-\xi^2x_2x_9$
	x_3x_4	x_0x_7	x_2x_9	01	0356	$x_3x_4-\xi^2x_0x_7+\xi x_2x_9$
	x_4^2	x_3x_5	x_0x_8	01	0267	$bx_4^2-bx_3x_5-\xi^2x_0x_8$
	x_4^2	x_2x_6	x_0x_{11}	01	0357	$x_4^2+\xi x_2x_6-\xi x_0x_{11}$
	x_4^2	x_1x_7	x_0x_9	01	1347	$ax_4^2-a\xi^2x_1x_7+\xi x_0x_9$
	x_0x_5	x_7^2	x_6x_{11}	03	1378	$x_0x_5+b\xi x_7^2-bx_6x_{11}$
	x_1x_5	x_6^2	x_7x_{10}	03	2378	$ax_1x_5+b\xi^2x_6^2-abx_7x_{10}$
	x_2x_5	x_6x_7	$x_{10}x_{11}$	04	0578	$ax_2x_5-bx_6x_7+abx_{10}x_{11}$
	x_3x_5	x_2x_6	x_1x_7	01	0456	$x_3x_5-\xi^2x_2x_6+\xi x_1x_7$
	x_3x_5	x_2x_6	x_0x_{10}	01	1356	$x_3x_5+\xi x_2x_6-x_0x_{10}$
	x_3x_5	x_1x_7	x_0x_{10}	01	0348	$x_3x_5-\xi^2x_1x_7+\xi^2x_0x_{10}$
	x_4x_5	x_0x_6	x_2x_7	01	0358	$ax_4x_5-\xi^2x_0x_6+a\xi x_2x_7$
	x_4x_5	x_0x_6	x_1x_{11}	01	1348	$ax_4x_5+\xi x_0x_6-a\xi x_1x_{11}$
	x_4x_5	x_2x_7	x_1x_{11}	01	0457	$x_4x_5-\xi^2x_2x_7+x_1x_{11}$
	x_5^2	x_1x_6	x_2x_{10}	01	0458	$ax_5^2+\xi x_1x_6-ax_2x_{10}$
	x_5^2	x_0x_7	x_2x_{11}	01	1358	$ax_5^2-\xi^2x_0x_7+ax_2x_{11}$
	x_0x_6	x_2x_7	x_1x_{11}	03	1238	$x_0x_6+a\xi x_2x_7+a\xi x_1x_{11}$
	x_1x_6	x_0x_7	x_2x_9	03	0678	$x_1x_6+\xi x_0x_7+\xi^2x_2x_9$
	x_2x_6	x_1x_7	x_0x_{10}	03	1237	$x_2x_6+\xi x_1x_7+x_0x_{10}$
	x_3x_6	x_5x_7	x_4x_{10}	03	0458	$x_3x_6+a\xi x_5x_7+ax_4x_{10}$
	x_4x_6	x_3x_7	x_5x_9	03	0456	$x_4x_6+\xi x_3x_7+\xi^2x_5x_9$
	x_5x_6	x_4x_7	x_3x_{11}	03	0457	$x_5x_6+\xi x_4x_7+\xi x_3x_{11}$
x_0^2	x_1x_2	x_3x_6	x_4x_{11}	05	1278	$x_0^2+a\xi^2x_1x_2+b\xi^2x_3x_6-ab\xi x_4x_{11}$
x_0^2	x_1x_2	x_5x_7	x_4x_9	03	1268	$x_0^2+a\xi x_1x_2-ab\xi x_5x_7+b\xi x_4x_9$
x_0^2	x_3x_6	x_5x_7	x_4x_8	01	2368	$x_0^2+bx_3x_6-abx_5x_7-a\xi^2x_4x_8$
x_0x_1	x_2^2	x_4x_6	x_5x_{10}	04	1268	$x_0x_1+a\xi x_2^2+bx_4x_6-ab\xi x_5x_{10}$
x_0x_1	x_2^2	x_3x_7	x_5x_{11}	05	1267	$x_0x_1+a\xi^2x_2^2-bx_3x_7+ab\xi^2x_5x_{11}$
x_0x_1	x_4x_6	x_5x_8	x_5x_{10}	01	2378	$x_0x_1-b\xi x_4x_6-a\xi^2x_5x_8+ab\xi^2x_5x_{10}$
x_0x_1	x_4x_6	x_5x_{10}	x_5x_{11}	05	2347	$x_0x_1-b\xi x_4x_6-ab\xi x_5x_{10}-ab\xi x_5x_{11}$
x_0x_1	x_3x_7	x_5x_8	x_5x_{11}	01	2468	$x_0x_1+b\xi^2x_3x_7-a\xi x_5x_8-ab\xi x_5x_{11}$
x_0x_1	x_3x_7	x_5x_{10}	x_5x_{11}	04	1358	$x_0x_1+b\xi^2x_3x_7+ab\xi^2x_5x_{10}+ab\xi^2x_5x_{11}$
x_1^2	x_0x_2	x_5x_6	x_3x_9	03	1267	$ax_1^2+a\xi^2x_0x_2+ab\xi^2x_5x_6-b\xi^2x_3x_9$
x_1^2	x_0x_2	x_4x_7	x_3x_{10}	04	1278	$x_1^2+\xi x_0x_2-b\xi x_4x_7+b\xi^2x_3x_{10}$
x_1^2	x_5x_6	x_4x_7	x_3x_8	01	2478	$x_1^2+bx_5x_6-bx_4x_7-\xi x_3x_8$
x_0x_2	x_5x_6	x_3x_8	x_3x_9	01	2568	$ax_0x_2-ab\xi x_5x_6-ax_3x_8+b\xi x_3x_9$
x_0x_2	x_5x_6	x_3x_9	x_3x_{10}	04	2358	$ax_0x_2-ab\xi x_5x_6-bx_3x_9-abx_3x_{10}$
x_0x_2	x_4x_7	x_3x_8	x_3x_{10}	01	2367	$x_0x_2+b\xi^2x_4x_7-\xi^2x_3x_8-bx_3x_{10}$
x_0x_2	x_4x_7	x_3x_9	x_3x_{10}	03	1456	$ax_0x_2+ab\xi^2x_4x_7+b\xi x_3x_9+ab\xi x_3x_{10}$
x_1x_2	x_3x_6	x_4x_8	x_4x_{11}	01	2467	$ax_1x_2-b\xi x_3x_6-a\xi x_4x_8+abx_4x_{11}$
x_1x_2	x_3x_6	x_4x_9	x_4x_{11}	03	2456	$ax_1x_2-b\xi x_3x_6-b\xi^2x_4x_9-ab\xi^2x_4x_{11}$
x_1x_2	x_5x_7	x_4x_8	x_4x_9	01	2578	$ax_1x_2+ab\xi^2x_5x_7-ax_4x_8-b\xi^2x_4x_9$
x_1x_2	x_5x_7	x_4x_9	x_4x_{11}	05	1347	$ax_1x_2+ab\xi^2x_5x_7+bx_4x_9+abx_4x_{11}$
x_2^2	x_4x_6	x_3x_7	x_5x_8	01	2567	$ax_2^2+bx_4x_6-bx_3x_7-ax_5x_8$

Variablen				M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
x_0x_3	x_2x_4	x_6^2	x_7x_{10}	04	2368	$x_0x_3+a\xi x_2x_4-b\xi x_6^2+ab\xi^2x_7x_{10}$
x_0x_3	x_2x_4	x_7x_9	x_7x_{10}	03	1568	$x_0x_3-ax_2x_4+bx_7x_9-ab\xi x_7x_{10}$
x_0x_3	x_2x_4	x_7x_{10}	x_7x_{11}	05	2367	$x_0x_3-ax_2x_4+ab\xi^2x_7x_{10}-abx_7x_{11}$
x_0x_3	x_1x_5	x_6^2	x_7x_{11}	05	2478	$x_0x_3+a\xi^2x_1x_5-bx_6^2+ab\xi^2x_7x_{11}$
x_0x_3	x_1x_5	x_7x_9	x_7x_{11}	03	2468	$x_0x_3-ax_1x_5+b\xi x_7x_9-abx_7x_{11}$
x_0x_3	x_1x_5	x_7x_{10}	x_7x_{11}	04	1378	$x_0x_3-ax_1x_5-ab\xi x_7x_{10}+ab\xi^2x_7x_{11}$
x_1x_3	x_0x_4	x_2x_5	x_8^2	01	2345	$bx_1x_3+b\xi x_0x_4+ab\xi^2x_2x_5-a\xi^2x_8^2$
x_1x_3	x_0x_4	x_6x_7	x_9^2	03	1467	$ax_1x_3+a\xi^2x_0x_4+ab\xi x_6x_7-b\xi x_9^2$
x_1x_3	x_2x_5	x_6x_7	x_{10}^2	04	1568	$x_1x_3+a\xi x_2x_5+b\xi^2x_6x_7-ab\xi x_{10}^2$
x_2x_3	x_1x_4	x_7^2	x_6x_{11}	05	1367	$x_2x_3+\xi x_1x_4-bx_7^2+b\xi^2x_6x_{11}$
x_2x_3	x_1x_4	x_6x_9	x_6x_{11}	03	2467	$ax_2x_3-ax_1x_4-bx_6x_9+ab\xi^2x_6x_{11}$
x_2x_3	x_1x_4	x_6x_{10}	x_6x_{11}	04	1368	$x_2x_3-x_1x_4+bx_6x_{10}-b\xi x_6x_{11}$
x_2x_3	x_0x_5	x_7^2	x_6x_9	03	1468	$ax_2x_3+a\xi^2x_0x_5-ab\xi^2x_7^2+b\xi^2x_6x_9$
x_2x_3	x_0x_5	x_6x_9	x_6x_{10}	04	2568	$ax_2x_3-ax_0x_5-bx_6x_9+ab\xi x_6x_{10}$
x_2x_3	x_0x_5	x_6x_9	x_6x_{11}	05	1478	$ax_2x_3-ax_0x_5+b\xi^2x_6x_9-ab\xi x_6x_{11}$
x_3^2	x_4x_5	x_0x_6	x_1x_{10}	04	3568	$x_3^2+a\xi x_4x_5-x_0x_6+a\xi^2x_1x_{10}$
x_3^2	x_4x_5	x_2x_7	x_1x_9	03	4568	$x_3^2+a\xi^2x_4x_5+ax_2x_7-\xi^2x_1x_9$
x_3^2	x_0x_6	x_2x_7	x_1x_8	01	2356	$bx_3^2-b\xi^2x_0x_6+ab\xi x_2x_7-a\xi x_1x_8$
x_0x_4	x_2x_5	x_6x_7	x_{11}^2	05	1378	$x_0x_4+a\xi^2x_2x_5+b\xi x_6x_7-ab\xi^2x_{11}^2$
x_1x_4	x_0x_5	x_7^2	x_6x_{10}	04	1578	$x_1x_4+\xi x_0x_5-bx_7^2+b\xi x_6x_{10}$
x_1x_4	x_0x_5	x_6x_9	x_6x_{10}	03	1567	$ax_1x_4-ax_0x_5+b\xi^2x_6x_9-abx_6x_{10}$
x_1x_4	x_0x_5	x_6x_{10}	x_6x_{11}	05	2378	$x_1x_4-x_0x_5+b\xi x_6x_{10}-b\xi^2x_6x_{11}$
x_2x_4	x_1x_5	x_6^2	x_7x_9	03	2567	$ax_2x_4+a\xi x_1x_5-b\xi x_6^2+b\xi x_7x_9$
x_2x_4	x_1x_5	x_7x_9	x_7x_{10}	04	2578	$ax_2x_4-ax_1x_5+b\xi x_7x_9-ab\xi^2x_7x_{10}$
x_2x_4	x_1x_5	x_7x_9	x_7x_{11}	05	1467	$ax_2x_4-ax_1x_5-bx_7x_9+ab\xi^2x_7x_{11}$
x_3x_4	x_5^2	x_1x_6	x_2x_{11}	05	3478	$x_3x_4+a\xi^2x_5^2-\xi^2x_1x_6+a\xi^2x_2x_{11}$
x_3x_4	x_5^2	x_0x_7	x_2x_{10}	04	3578	$x_3x_4+a\xi x_5^2+\xi x_0x_7-a\xi x_2x_{10}$
x_3x_4	x_1x_6	x_2x_8	x_2x_{11}	01	2456	$bx_3x_4+b\xi x_1x_6-a\xi x_2x_8-ab\xi x_2x_{11}$
x_3x_4	x_1x_6	x_2x_{10}	x_2x_{11}	04	1238	$x_3x_4+\xi x_1x_6+a\xi^2x_2x_{10}+a\xi^2x_2x_{11}$
x_3x_4	x_0x_7	x_2x_8	x_2x_{10}	01	2357	$bx_3x_4-b\xi^2x_0x_7-a\xi^2x_2x_8+ab\xi^2x_2x_{10}$
x_3x_4	x_0x_7	x_2x_{10}	x_2x_{11}	05	1237	$x_3x_4-\xi^2x_0x_7-a\xi x_2x_{10}-a\xi x_2x_{11}$
x_4^2	x_3x_5	x_2x_6	x_0x_9	03	4567	$ax_4^2+a\xi x_3x_5-ax_2x_6+\xi x_0x_9$
x_4^2	x_3x_5	x_1x_7	x_0x_{11}	05	3467	$x_4^2+\xi^2x_3x_5+x_1x_7-\xi x_0x_{11}$
x_4^2	x_2x_6	x_1x_7	x_0x_8	01	2457	$bx_4^2-b\xi^2x_2x_6+b\xi x_1x_7-\xi^2x_0x_8$
x_3x_5	x_2x_6	x_0x_8	x_0x_9	01	2358	$abx_3x_5+ab\xi x_2x_6-ax_0x_8-b\xi^2x_0x_9$
x_3x_5	x_2x_6	x_0x_9	x_0x_{11}	05	1247	$ax_3x_5+a\xi x_2x_6+x_0x_9+ax_0x_{11}$
x_3x_5	x_1x_7	x_0x_8	x_0x_{11}	01	2346	$bx_3x_5-b\xi^2x_1x_7-\xi x_0x_8+bx_0x_{11}$
x_3x_5	x_1x_7	x_0x_9	x_0x_{11}	03	1246	$ax_3x_5-a\xi^2x_1x_7-\xi^2x_0x_9-a\xi^2x_0x_{11}$
x_4x_5	x_0x_6	x_1x_8	x_1x_{10}	01	2347	$abx_4x_5+b\xi x_0x_6-a\xi^2x_1x_8-abx_1x_{10}$
x_4x_5	x_0x_6	x_1x_9	x_1x_{10}	03	1256	$ax_4x_5+\xi x_0x_6+\xi x_1x_9+a\xi x_1x_{10}$
x_4x_5	x_2x_7	x_1x_8	x_1x_9	01	2458	$abx_4x_5-ab\xi^2x_2x_7-ax_1x_8+b\xi x_1x_9$
x_4x_5	x_2x_7	x_1x_9	x_1x_{10}	04	1258	$ax_4x_5-a\xi^2x_2x_7-x_1x_9-ax_1x_{10}$
x_5^2	x_1x_6	x_0x_7	x_2x_8	01	2348	$abx_5^2-b\xi^2x_1x_6+b\xi x_0x_7-ax_2x_8$
x_0x_6	x_2x_7	x_1x_8	x_1x_9	03	2678	$bx_0x_6+ab\xi x_2x_7-a\xi x_1x_8+b\xi^2x_1x_9$

Variablen				M	M'	$\lambda P_{M,M'}(x)$
x_0x_6	x_2x_7	x_1x_8	x_1x_{10}	04	1678	$bx_0x_6 + ab\xi x_2x_7 + a\xi^2 x_1x_8 + abx_1x_{10}$
x_1x_6	x_0x_7	x_2x_8	x_2x_{10}	04	2678	$bx_1x_6 + b\xi x_0x_7 - ax_2x_8 + abx_2x_{10}$
x_1x_6	x_0x_7	x_2x_8	x_2x_{11}	05	1678	$bx_1x_6 + b\xi x_0x_7 + a\xi x_2x_8 + ab\xi x_2x_{11}$
x_2x_6	x_1x_7	x_0x_8	x_0x_9	03	1678	$abx_2x_6 + ab\xi x_1x_7 + ax_0x_8 + b\xi^2 x_0x_9$
x_2x_6	x_1x_7	x_0x_8	x_0x_{11}	05	2678	$bx_2x_6 + b\xi x_1x_7 - \xi^2 x_0x_8 + b\xi x_0x_{11}$
x_3x_6	x_5x_7	x_4x_8	x_4x_9	03	5678	$bx_3x_6 + ab\xi x_5x_7 + ax_4x_8 + b\xi^2 x_4x_9$
x_3x_6	x_5x_7	x_4x_8	x_4x_{11}	05	3678	$bx_3x_6 + ab\xi x_5x_7 - a\xi^2 x_4x_8 + ab\xi x_4x_{11}$
x_4x_6	x_3x_7	x_5x_8	x_5x_{10}	04	5678	$bx_4x_6 + b\xi x_3x_7 - ax_5x_8 + abx_5x_{10}$
x_4x_6	x_3x_7	x_5x_8	x_5x_{11}	05	4678	$bx_4x_6 + b\xi x_3x_7 + a\xi x_5x_8 + ab\xi x_5x_{11}$
x_5x_6	x_4x_7	x_3x_8	x_3x_9	03	4678	$abx_5x_6 + ab\xi x_4x_7 - a\xi x_3x_8 + b\xi^2 x_3x_9$
x_5x_6	x_4x_7	x_3x_8	x_3x_{10}	04	3678	$bx_5x_6 + b\xi x_4x_7 + \xi^2 x_3x_8 + bx_3x_{10}$

Literaturverzeichnis

[1] Albert, A. A.: Structure of Algebras. Amer. Math. Soc. Coll. Pub 24 (1961).

[2] Aljadeff, Eli / Sonn, Jack: On the projective Schur group of a field. J. Alg. 178 (1995), 530–540.

[3] Amitsur, S. A.: Generic Splitting Fields of Central Simple Algebras. Ann. Math. 62 (1955), 8–43.

[4] Artin, Michael: Brauer-Severi varieties (Notes by A. Verschoren). In: Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981), pp. 194–210. Hrsgg.: F. M. J. van Oystaeyen / A. H. M. J. Verschoren. Berlin u. a.: Springer 1982. (LNM; 917)

[5] Blanchet, Altha: Function Fields of Generalized Brauer-Severi Varieties. Comm. in Alg. 19(1) (1991), 97–118.

[6] Borel, Armand: Linear Algebraic Groups. New York u. a.: Benjamin 1969.

[7] Brodmann, Markus: Algebraische Geometrie. Eine Einführung. Basel u. a.: Birkhäuser 1989. (Basler Lehrbücher; 1)

[8] Brzezinski, J: Brauer-Severi Schemes of Orders. In: Orders and their applications (Oberwolfach, 1984), pp. 18–49. Berlin u. a.: Springer 1985. (LNM; 1142)

[9] Châtelet, Francois: Variations sur un thème de H. Poincaré. Ann. Sci. E. N. S. 61 (1944), 249–300.

[10] Colliot-Thélène, Jean-Louis: Les grands thèmes de François Châtelet. L'Enseignement Mathématique 34 (1988), 387–405.

[11] Deuring, Max: Algebren. 2. korr. Aufl. Berlin u. a.: Springer 1968. (Ergebnisse; 41)

[12] Dornhoff, Larry: Group Representation Theory. Part A: Ordinary Representation Theory. New York: Marcel Dekker 1971.

[13] Draxl, P. K.: Skew fields. Cambridge u. a.: University Press 1983. (London Math. Soc. Lecture Note Series; 81)

[14] Grothendieck, A./ Dieudonné, J.A.: Eléments de Géométrie Algébrique, I. Berlin u. a.: Springer 1971. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 166)

[15] Hartshorne, Robin: Algebraic Geometry. New York u. a.: Springer 1977.

[16] Hodge, W. V. D. / Pedoe, D.: Methods of Algebraic Geometry. Cambridge: University Press 1952.

[17] Heuser, Ansgar: Über den Funktionenkörper der Normfläche einer zentral einfachen Algebra. J. Reine Angew. Math. 301 (1978), 105–113.

[18] Humphreys, James E.: Linear Algebraic Groups. New York u. a.: Springer 1975.

[19] Huppert, Bertram: Endliche Gruppen I. Nachdruck der ersten Auflage. Berlin u. a.: Springer 1979. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 134)

[20] Isaacs, I. Martin: Character Theory of Finite Groups. New York u. a.: Academic Press 1976.

[21] Iwahori, Nagayoshi / Matsumoto, Hideya: Several Remarks on Projektive Representations of Finite Groups. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 10 (1964), 129–146.

[22] Jacobson, Nathan: Finitedimensional Division Algebras over Fields. Berlin u. a.: Springer 1996.

[23] Kang, Ming-Chang: Constructions of Brauer-Severi Varieties and Norm Hypersurfaces. Can. J. math. XLII, 2 (1990), 230–238.

[24] Karpilovsky, Gregory: Projective Representations of Finite Groups. New York u. a.: Marcel Dekker 1985.

[25] Kersten, Ina: Brauergruppen von Körpern. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1990. (Aspekte der Mathematik; 6)

[26] Knus, Max-Albert; Merkurjev, Alexander; Rost, Markus; Tignol, Jean-Pierre: The Book of Involutions. AMS Colloquium publications; vol. 44 (1998).

[27] Kowalsky, Hans-Joachim: Lineare Algebra. 7. Aufl. Berlin u. a.: de Gruyter 1975.

[28] Lang, Serge: Algebra. 3rd ed. Reading, Massachusetts u. a.: Addison-Wesley 1995.

[29] Lorenz, Falko: Einführung in die Algebra. Teil I. 2., überarbeitete Auflage. Mannheim u. a.: BI-Wiss.-Verl. 1992.

[30] Lorenz, Falko / Opolka, Hans: Einfache Algebren und projektive Darstellungen über Zahlkörpern. Math. Z. 162 (1978), 175–182.

[31] Mumford, David: The Red Book of Varieties and Schemes. Berlin u. a.: Springer 1988. (LNM; 1358)

[32] Mumford, David: Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties. Berlin u. a.: Springer 1976. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 221)

[33] Pierce, Richard S.: Associative Algebras. New York u. a.: Springer 1982. (GTM; 88)

[34] Roquette, Peter: On the Galois Cohomology of the Projective Linear Group and its Applications to the Construction of Generic Splitting Fields of Algebras. Math. Ann. 150 (1963), 411–439.

[35] Saltman, David J.: Norm Polynomials and Algebras. J. Alg. 62 (1980), 333–345.

[36] Scharlau, Winfried: Quadratic and Hermitian Forms. Berlin u. a.: Springer 1985. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 270)

[37] Schofield, Aidan / van den Bergh, Michel: The index of a Brauer class on a Brauer-Severi variety. Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992), 729–739.

[38] Schofield, Aidan / van den Bergh, Michel: Division algebra coproducts of index n. Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), 505–517.

[39] Serre, Jean-Pierre: Corps locaux. Paris: Hermann 1962.

[40] Serre, Jean-Pierre: Cohomologie Galoisienne. Berlin: Springer 1964. (LNM; 5)

[41] Shafarevich, Igor R.: Basic Algebraic Geometry. Berlin u. a.: Springer 1977.

[42] Sommer, Jörn: Diophantische Methoden bei der expliziten Lösung von Einbettungsproblemen in der Galoistheorie. Braunschweig: Diss. 1998.

[43] Weil, André: The field of definition of a variety. Amer. J. of Math. 78 (1956), 509–524.

[44] Witt, Ernst: Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz. Math. Z. 39 (1935), 462–467.

Symbolverzeichnis

$\bigwedge^d(V)$	9
$u_1 \wedge \ldots \wedge u_d$	10
$\mathcal{M}^\circ_{d,X}$	11
$\mathcal{M}_{d,X}$	11
$\mathcal{M}(X)$	11
π_M	11
$\overline{M}$	11
$M_1 + M_2$	11
$M_1 - M_2$	11
$M_1 \cup M_2$	11
$M_1 \cap M_2$	11
$M_1 M_2$	11
$M_1 M_2$	11
$i \in M$	11
$M - i$	11
$\mathrm{pos}(i, M)$	11
a_M	12
e_{M_1,M_2}	14
x_{M_1,M_2}	14
p_{M_1,M_2}	14
$\mathbf{P}W$	15
$\mathcal{SET}$	15
$\mathcal{G}$	15
$\mathrm{Grass}_k(V, d)$	15
$\mathrm{Grass}_k(n, d)$	15
V_K	15
$\mathrm{St}_{n,d}\, k$	16
$(a_1 \mid \ldots \mid a_d)$	16
$\langle a \rangle$	16
$\wedge a$	16
π	16
$\wedge$	16
$a \cdot w$	18
$\tilde{a}$	19
$a^M_{M'}$	19
P	20
$P_{M,M'}$	21
$V_k(n, d)$	21
$V \times_k K$	21
U_M	29
P^*_M	29
P^{-1}	29
αu	34
$\alpha_\theta u$	34
$\mathrm{Grass}_{\theta/k}(n, d)$	34
θ_K	34
$B^\alpha_{M,N}$	37
$\mathrm{Inv}^T_{\theta/k}(n, d)$	37
$V_{\theta/k}(n, d)$	37
θ_A	38
$BS_{A,\mu}$	39
$V_{A,\mu}$	39
$L^T_{A,\mu}$	39
$r\theta_D$	39
$\mathrm{Grass}_D(r, d)$	39
$V_D(r, d)$	39
$\tilde{\theta}$	40
$\left(\frac{a,b}{k,-1}\right)$	41
Ψ	44
$\mathrm{St}_{\theta/k}(n, d)$	44
$V^M_{\theta/k}(n, d)$	44
$\mathrm{St}^M_{\theta/k}(n, d)$	44
$\tilde{f}$	48
θ^*	50

$\theta_1 \cong \theta_2$	51
$\mathrm{Mat}_r\, k \otimes_k A$	51
$k^r \otimes_k A$	51
$\theta \otimes \theta'$	52
$r\theta$	52
θr	52
θ^r	52
γ	53
η	54
$\deg A$	58
$\mathrm{ind}\, A$	59
$A \sim B$	59
$\deg \theta$	60
$\theta_1 \oplus \theta_2$	60
$\widetilde{\mathrm{Inv}}^T_{\theta/k}(n, d)$	68
$\mathrm{Nred}_{A/k}$	69
$(G, s)_k$	75
σM	78
$s_\sigma(M)$	78
$\mathrm{sign}_\sigma(M)$	78
$B_\sigma(M)$	79
$B(M)$	79
$B_\sigma(\tau)$	79
$L_{A,\mu}$	83
$\tilde{L}_{A,\mu}$	84
$D_\sigma(M)$	85
Ξ	86
Π	88
$D(M)$	88
$\mathcal{P}$	89
red	89
(K, G, f)	94
(K, σ, a)	94
$N_{K/k}$	94
$\left(\frac{a,b}{k,\xi}\right)$	97
$K_{a,d}$	97
$N_{K_{a,d}/k}$	97
σN	118
$N\sigma$	118
$\mathrm{sign}\, N$	118
$[N]$	119
$[N]_w$	119
$[N]_b$	119
$\tilde{P}_{M,M'}$	120
$s^\circ_\sigma(N)$	121
b^M	133
$b^{M,\sigma}$	137
γN	139
$\Gamma_n(N)$	139
$\Pi_n(N, \gamma)$	139
$\Pi^*_n(N, \gamma)$	139
$\Delta(B, N, M)$	142
$B(N, M)$	145
$N_{A/k}$	147
$n_{A/k}$	147
$ZN(\sigma, \tau)$	160

Stichwortverzeichnis

aequivalente Darstellung, 51
aequivalente zentraleinfache Algebren, 59

Bahnengleichung, 177
Bahnstruktur, 177
 von Symbolalgebren, 106
birational äquivalent, 171
Brauer-Severi-Varietäten, 33, 38
 einer Symbolalgebra vom Grad 3, 132
 von Quaternionenalgebren, 41
 von Symbolalgebren, 159
Brauerkörper
 einer Symbolalgebra vom Grad 3, 132

darstellbarer Funktor, 15
Darstellung, 34
darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten, 33
darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten, 37
 Beispiele, 38
 geometrische Eigenschaften, 44
 von einfachen Algebren, 62
Dimensionsreduzierung, 108

Entwicklungssatz von Laplace, 140
Ersetzungsrelationen, 85, 121
etale Algebren, 153
 zyklische, 154

Funktionenkörper, 171

geometrische Operation, 174
Grassmann-Algebra, 9
Grassmann-Funktor, 15
Grassmann-Varietäten, 21, 38
 darstellungsinvariante, *siehe* darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten
Gruppenalgebren, *siehe* verschränkte Gruppenalgebren

induzierte Darstellung, 50
induzierte Operation, 18
Invarianzvarietäten, 37, 40
 reduzierte, *siehe* reduzierte Invarianzvarietäten
 von einfachen Algebren, 66
 von Quaternionenalgebren, 41
irreduzible Darstellung, 60

Konstruktion von Idealen
 einer Symbolalgebra vom Grad 3, 128

lineare Varietat, 40
Linksidealvarietäten, 38
 von Symbolalgebren, 103
 von verschränkten Gruppenalgebren, 83

Norm, 94, 147
Norm, reduzierte, *siehe* reduzierte Norm
Normkriterium
 einer Symbolalgebra vom Grad 3, 127
 für Symbolalgebren, 100
 für zyklische Algebren, 94
Normpolynom, 147
Normrelation, 147
Normrelationen, 93
 einer Symbolalgebra vom Grad 3, 112, 122, 125
Normrestalgebren, 97
Normvarietät, 125
Nullbahnen, 86
nullbahnenfrei, 86

Operation, 17
 geometrische, 174

Plücker-Einbettung, 20
Umkehrung, *siehe* Umkehrung der Plücker-Einbettung
Plücker-Koordinaten, 13
Plücker-Polynome, 21
Plücker-Relationen, 21
Beispiele, 24
Komplexität, 25
sortierungsunabhängige, 118, 120
verallgemeinerte, 137
Projektivierung, 15

Quotient
algebraischer, 175
geometrischer, 175

reduzierte Invarianzvarietäten, 68
reduzierte Norm, 69
von Symbolalgebren, 104
reduzierte Plücker-Relationen, 89

Satz
Darstellbarkeit des Funktors $K \longmapsto \mathrm{Grass}_{\theta_K/K}(n,d)$, 35
Darstellbarkeit des Grassmann-Funktors, 22
sortierungsunabhängige Plücker-Relationen, 118, 120
Symbolalgebren, 97
als Gruppenalgebren, 103
vom Grad 3, 110, 117

Umkehrung der Plücker-Einbettung, 29
geometrische Eigenschaften, 45

verallgemeinerte Plücker-Relationen, 137
verschränkte Gruppenalgebren, 75
verschränkte Produkte, 93
verträgliche Morphismen, 48

Zerfällungsdarstellung, 69
Zerfällungskörper
$\frac{1}{\nu}$-, 70
Zerfallskriterium
für darstellungsinvariante Grassmann-Varietäten, 71
für Symbolalgebren, 100
für zyklische Algebren, 94
zerlegbare Vektoren, 10
zyklische Algebren, 94
zyklische etale Algebren, 154